О поведении p-аналитических функций в угловых точках

А. А. Скоробогатько

В работе рассматривается вопрос о поведении p-аналитических функций в угловых точках.

Пусть две простые гладкие кривые δ_1 и δ_2 пересекаются в точке Z_0 комплексной плоскости $Z = x + iy$ под углом γ величиною $\beta\pi\,(0 < \beta \leqslant 2)$. Будем говорить, что указанный угол обладает свойством α), если функция $\omega = (Z - Z_0)^{\frac{1}{\beta}}$ преобразует стороны этого угла в аналитическую кривую в окрестности точки $\omega = 0$. Например, свойством α) будет обладать угол, составленный двумя прямыми, пересекающимися в точке Z_0 под тем или иным углом.

Теорема. *Пусть угол γ в точке Z_0 обладает свойством* α), $w = f(Z) = \varphi + i\psi$ — p — *аналитическая функция с характеристикой* $p = p(Z)$, *преобразующая взаимно однозначно угловую окрестность точки* Z_0 *с углом* *при вершине, равном* $\beta\pi$, *в полуокрестность точки* $w = 0$*. *Тогда в точке* Z_0 *имеют место равенства*

$$\frac{d(f)}{dZ} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \begin{cases} 0 & \text{если } \beta < 1, \\ \infty, & \text{если } \beta > 1, \\ \neq 0, \infty, & \text{если } \beta = 1. \end{cases} \tag{1}$$

Действительно, угловая окрестность точки Z_0 в плоскости Z при помощи функции $\omega = (Z - Z_0)^{\frac{1}{\beta}}$ преобразуется в криволинейную полуокрестность точки $\omega = 0$. Обозначим через $\zeta = \zeta(\omega) = \xi + i\eta$ аналитическую функцию, отображающую указанную криволинейную полуокрестность в прямолинейную полуокрестность точки $\zeta = 0$. При этом аналитическая кривая, проходящая через точку $\omega = 0$ и являющаяся образом дуг δ_1, δ_2, перейдет в отрезок вещественной оси в плоскости ζ, входящей в состав границы окрестности точки $\zeta = 0$. В силу инвариантности свойства p-аналитичности функций при конформном преобразовании независимого переменного [1], функция $w = f(Z)$, будучи рассматриваемая как функция от $\zeta = \xi + i\eta$, является p-аналитической в прямолинейной полуокрестности точки $\zeta = 0$ с характеристикой $p = p\,[Z(\zeta)]$. Функция $w = f(Z)$ взаимно однозначно преобразует указанную полуокрестность точки $\zeta = 0$ в прямолинейную полуокрестность точки $w = 0$. Построенная таким образом функция $w = f[Z(\zeta)]$, как легко проверить, будет p-аналитической в окрестности точки $\zeta = 0$ с характеристикой $p = p(\zeta)$, принимающей одинаковые значения в точках, симметричных относительно вещественной оси.

В силу теоремы о сохранении однолистной окрестности для p-аналитических функций [1] имеем

$$\frac{d(f)}{d\zeta} \neq \begin{cases} 0, \\ \infty. \end{cases} \tag{2}$$

Учитывая, что ζ есть аналитическая функция от Z, в соответствии с правилами вычисления обобщенной производной [2] получаем

$$\frac{d(f)}{dZ} = \frac{d(f)}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dZ}. \tag{3}$$

В силу известных свойств конформных отображений

$$\frac{d\zeta}{dZ} = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta < 1, \\ \infty, & \text{если } \beta > 1, \\ \neq 0, \infty, & \text{если } \beta = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Из (2), (3) и (4) непосредственно вытекает справедливость утверждений теоремы.

Приведем один из примеров применения установленной теоремы.

В теории кручения валов переменного сечения известны отдельные примеры, когда напряжения в угловых точках на поверхности тела обращаются в бесконечность (см., например, [3]). При помощи доказанной выше теоремы оказывается возможным в общем случае установить поведение напряжений в угловых точках при кручении тел вращения, найти необходимые и достаточные условия того, чтобы эти напряжения не обращались в бесконечность.

Введем функцию комплексного переменного

$$f(\eta) = \varphi + i\psi, \tag{5}$$

---

* О характеристике $p(Z)$, как и в работе 1, мы предполагаем, что она непрерывно дифференцируема и положительна в некоторой области, содержащей рассматриваемую угловую окрестность точки Z_0.

вещественная и мнимая часть которой как функции от $\eta = r + iz$ ($\mathrm{Re}\,\eta > 0$), удовлетворяют системе дифференциальных уравнений кручения валов переменного сечения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{\mu r^3}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{1}{\mu r^3}\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{6}$$

Функция, определенная равенствами (5), (6), будет p-аналитической с характеристикой $p = \mu r^3$ и через эту функцию в цилиндрической системе координат r, θ, z очень просто выражаются все характеристики напряженного состояния при кручении валов переменного сечения. В частности, для вектора полного касательного напряжения $\vec{\tau} = \tau_{r\theta} + i\tau_{z\theta}$ имеем

$$\tau_{r\theta} = \mu r\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

$$\tau_{z\theta} = \mu r\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

Теорема. *Пусть γ — внутренний угол в точке $\eta_0 = r_0 + iz_0$ границы L области G, являющейся осевым сечением скручиваемого тела вращения, $\beta\pi$ $(0 < \beta \leqslant 2)$ — величина этого угла. Пусть угол γ удовлетворяет условию α). Тогда напряжения в точке η_0 обращаются в бесконечность, если $\beta > 1$, равны нулю, если $\beta < 1$, и остаются конечными и отличными от нуля, если $\beta = 1$.*

В самом деле, пользуясь комплексным потенциалом напряжений $f(\eta) = \varphi + i\psi$, найдем выражение для вектора $\vec{\tau}$ через значение его обобщенной производной

$$\frac{d(f)}{d\eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial r} - i\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\right) + i\left(\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right].$$

Учитывая (7), $\frac{d(f)}{d\eta}$ можно представить в виде

$$\frac{d(f)}{d\eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\tau_{r\theta}}{\mu r} + r^2\tau_{r\theta}\right) - \frac{i}{2}\left(r^2\tau_{z\theta} + \frac{1}{\mu r}\tau_{z\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(r^2 + \frac{1}{\mu r}\right)(\tau_{r\theta} - i\tau_{z\theta}).$$

Таким образом,

$$\tau_{r\theta} - i\tau_{z\theta} = 2\left(r^2 + \frac{1}{\mu r}\right)^{-1}\frac{d(f)}{d\eta}.$$

Отсюда, в силу теоремы о поведении p-аналитических функций в угловых точках, имеем

$$\tau = |\vec{\tau}| = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta < 1, \\ \infty, & \text{если } \beta > 1, \\ \neq 0,\ \infty, & \text{если } \beta = 1. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Положий, Теорема о сохранении области для некоторых эллиптических систем дифференциальных уравнений и ее применение, Матем. сб., т. 32, вып. 3, 1953.

2. Г. Н. Положий, О применении обобщенной производной к одному классу квазиконформных отображений, ДАН СССР, т. 58, 1948.

3. Г. Нейбер, Концентрация напряжений, Гостехиздат, М.—Л., 1947.

Поступила 24.I 1964 г.
Киев