# Бесконечно малые изгибания поверхностей с краем при некоторых граничных условиях

*В. Т. Фоменко*

В работе рассматриваются бесконечно малые изгибания поверхностей положительной кривизны с гладким краем. Пусть вдоль края на поверхности задано непрерывное поле $R$ простых стрелок. Спрашивается, существуют ли бесконечно малые изгибания поверхности, при которых точки края смещаются в направлении $R$ на заданную величину $\sigma(s)$. Эта задача сформулирована И. Н. Векуа в книге [1] и решена им при некоторых ограничениях, наложенных на поле $R$. В настоящей работе указанная задача решается для полей $R$, не рассматриваемых в [1]. Найдены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи, наложенные на функцию $\sigma(s)$. Как следствие этих условий вытекает жесткость поверхностей при втулочных связях специального вида, а для поверхностей с теневой границей — усиление теоремы А. В. Погорелова [2] о жесткости поверхностей при условии стационарности расстояний точек края от некоторой фиксированной точки.

1. Основные предположения. Поверхности $S$ считаем положительной вплоть до края $L$ гауссовой кривизны $K$ ($K \geqslant k_0 > 0$), при этом $S \in D_{3,p}$, $p > 2$ (радиус-вектор $\mathbf{r}(x, y)$ поверхности допускает три обобщенные в смысле Соболева производные, суммируемые со степенью $p$); $L \in C^1_\mu$, $0 < \mu < 1$ (радиус-вектор $\mathbf{r}(s)$ края допускает производную, удовлетворяющую условию Гельдера с показателем $\mu$). Бесконечно малые изгибания рассматриваем в классе $D_{3,p}$, $p > 2$. Пусть вдоль края $L$ в касательной плоскости к поверхности $S$ задано непрерывное поле $R$ простых стрелок.

Ориентируем $S$ и $L$ так, чтобы при обходе по $L$ поверхность лежала слева. Обозначим через $\vartheta$ угол, образованный направленной касательной кривой $L$ и стрелкой поля $R$ (отсчет угла производим от касательной к стрелке против хода часов). Угол $\vartheta$ является функцией длины дуги контура $L$. Будем считать, что $\vartheta(s) \in C_\mu$, $0 < \mu < 1$, и приращение угла $\vartheta$ при однократном обходе по контуру $L$ равно нулю либо $+2\pi$, т. е.

$$\Delta L\vartheta = 0 \text{ или } \Delta L\vartheta = 2\pi.$$

2. Получение краевой задачи. Введем на поверхности $S$ изотермически-сопряженную параметризацию $x$, $y$, отображающую $S$ на единичный круг $D$ с границей $\Gamma$. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y)$ — радиус-вектор поверхности $S$. Обозначим через $\mathbf{z} = \mathbf{z}(x, y)$ вектор-смещение точек поверхности $S$ при ее бесконечно малом изгибании. Обозначим

$$a = \mathbf{z}\mathbf{r}_x,\ b = \mathbf{z}\mathbf{r}_y,\ c = \mathbf{z}\mathbf{n}.$$

Введем в рассмотрение комплексную функцию изгибаний

$$w(z) = a(x, y) + ib(x, y), \quad z = x + iy.$$

Последняя является решением уравнения бесконечно малых изгибаний поверхности $S$:

$$\partial_{\bar z} w + A(z)\, w + B(z)\, \bar w = 0 \text{ в } D, \tag{1}$$

где $A(z)$ и $B(z)$ — известные функции класса $L_p(D)$, $p > 2$. Исключим из рассмотрения нетривиальные бесконечно малые изгибания поверхности $S$. Для этого потребуем, чтобы произвольная точка $(x_0, y_0)$ и ее касательная плоскость сохранились при бесконечно малых изгибаниях. Не нарушая общности, будем считать, что $(x_0, y_0)$ совпадает с началом координат. Тогда

$$\bar{\mathbf{z}}(0,0) = \mathbf{z}_x(0,0) = \mathbf{z}_y(0,0) = 0. \qquad (2_1)$$

Отсюда вытекает, что

$$w(0) = w_{\bar{z}}(0) = w_z(0) = 0. \qquad (2)$$

Таким образом, всякое решение $w(z)$ уравнения (1), отличное от нуля, удовлетворяющее условиям (2) порождает нетривиальное бесконечно малое изгибание поверхности $S$.

Обозначим через $\mathbf{e}$ единичный вектор поля $R$ в текущей точке $M$ края $L$. Пусть при бесконечно малом изгибании поверхности точки края смещаются в направлении вектора $\bar{e}$ на заданную величину $\varepsilon\sigma(s)$, где $\sigma(s) \in C_\mu$, $0<\mu<1$, $\varepsilon$ — параметр бесконечно малого изгибания поверхности. Тогда на поле $\bar{z}(x, y)$ вдоль $L$ накладывается условие

$$\bar{\mathbf{z}}(s)\,\mathbf{e}(s) = \sigma(s). \qquad (3_1)$$

Обозначим через $\{\alpha, \beta, 0\}$ координаты вектора $\bar{\mathbf{e}}$ в репере, $\bar{\mathbf{r}}_x$, $\bar{\mathbf{r}}_y$, $\bar{\mathbf{n}}$, тогда последнее условие перепишется в виде

$$\alpha(s)\,a + \beta(s)\,b = \sigma(s) \ \text{ на } \Gamma. \qquad (3)$$

Здесь $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\sigma(s)$ — известные функции класса $C_\mu$, $0<\mu<1$. Индекс комплексной функции $\alpha + i\beta$ определяется по формуле

$$\operatorname{Ind}(\alpha + i\beta) = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg(\alpha + i\beta) = 1 - \frac{1}{2\pi}\Delta_z\vartheta.$$

3. Условия разрешимости задачи (1), (2), (3). Рассмотрим сначала случай $\Delta L\vartheta = 0$. Так как при этом $\operatorname{Ind}(\alpha + i\beta) = 1$, то краевая задача (1), (3) разрешима при любом выборе функции $\sigma(s)$; решение зависит от 3 параметров и имеет вид [1]

$$\widetilde{w}(z) = \int_\Gamma M(z, s)\,\sigma(s)\,ds + \sum_{k=1}^{3} c_k w_k, \qquad (4)$$

где ядро $M(z, s)$ строится независимо от функции $\sigma(s)$, но в зависимости от поверхности $S$ и поля $R$; $w_k$ — решения однородной краевой задачи, зависят от $S$ и $R$ и не зависят от $\sigma(s)$; $c_k$ — произвольные вещественные постоянные. Функция $\widetilde{w}(z)$ в (4) порождает нетривиальные бесконечно малые изгибания тогда и только тогда, когда выполняются условия (2). Покажем, что последнее выполняется лишь при специальном выборе $\sigma(s)$.

Воспользуемся интегральным представлением для функции $\widetilde{w}(z)$:

$$\widetilde{w}(z) = \varphi(z)\, e^{\omega(z, \widetilde{w})}, \qquad (5)$$

где $\varphi(z)$ голоморфна в $D$; $\omega(z, \widetilde{w}) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_D \left[A(\zeta) + B(\zeta)\frac{\bar{w}}{w}\right]\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}$. Подставляя (5) в условие (3), получаем для $\varphi(z)$ краевое условие

$$\operatorname{Re}\{\overline{\lambda(t)}\, e^{\omega(t, \widetilde{w})}\varphi(t)\} = \sigma(t), \ \ t \in \Gamma, \qquad (6)$$

где $\lambda(t) = \alpha(s) + i\beta(s)$; $t = e^{is}$; $\operatorname{Ind}\lambda(t)\,\overline{e^{\omega(t, \widetilde{w})}} = 1$ для любой функции $\widetilde{w}$. Аналитическая функция $\varphi(z)$ является одним из решений задачи (6), следовательно, она допускает представление

$$\varphi(z) = z e^{i\gamma(z, \widetilde{w})}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\omega_1(s, \widetilde{w})}\sigma(s)\,\frac{e^{is} + z}{e^{is} - z}\,ds + i\beta_0 + \beta_1\left(z - \frac{1}{z}\right) + i\beta_2\left(z + \frac{1}{z}\right)\right\},$$

где

$$\gamma(z, \widetilde{w}) = \omega_2 + i\omega_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} [\arg\lambda(s)\, \overline{e^{\omega(s, \widetilde{w})}} - s]\, \frac{e^{is}+z}{e^{is}-z}\, ds, \tag{7}$$

$\beta_0, \beta_1, \beta_2$ — некоторые вещественные постоянные, зависящие от выбора функции $\widetilde{w}(z)$.

Таким образом, всякая функция $\widetilde{w}$ из (4) допускает представление

$$\widetilde{w}(z) = ze^{i\gamma(z, \widetilde{w}) + \omega(z, \widetilde{w})}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{\omega_1(s, \widetilde{w})}\sigma(s)\,\frac{e^{is}+z}{e^{is}-z}\, ds + i\beta_0 + \beta_1\left(z - \frac{1}{z}\right) + \right.$$

$$\left. + i\beta_2\left(z + \frac{1}{z}\right)\right\}, \tag{8}$$

где $\gamma(z, \widetilde{w})$ определяется по формуле (7).

Из формулы (8) следует, что условия (2) выполняются тогда и только тогда, когда

$$\beta_1 + i\beta_2 = 0 \text{ и } \int\limits_0^{2\pi} e^{\omega_1(s, \widetilde{w})}\sigma(s)\, ds + i\beta_0 = 0,$$

где $\omega_1(s, \widetilde{w})$ — вещественная функция. Отсюда следует, что

$$\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0; \ \int\limits_0^{2\pi} e^{\omega_1(s, \widetilde{w})}\sigma(s)\, ds = 0. \tag{9}$$

Подставляя $\widetilde{w}$ в (9) по формуле (4), получаем необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (1), (2), (3):

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{a(s;\, \sigma)}\sigma(s)\, ds = 0, \tag{10}$$

где оператор $a(s; \sigma)$ определяется с точностью до постоянных $c_k$ $(k = 1, 2, 3)$ поверхностью $S$, полем направлений $R$ и функцией $\sigma(s)$. Решение задачи (1), (2), (3) представим в виде

$$w(z) = ze^{i\gamma(z, \widetilde{w}) + \omega(z, \widetilde{w})}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{\omega_1(s, \widetilde{w})}\sigma(s)\,\frac{e^{is}+z}{e^{is}-z}\, ds.$$

Отсюда следует, что $w(z) \equiv 0$, если $\sigma(s) \equiv 0$.

Для поверхностей второго порядка оператор $a(s; \sigma)$ не зависит от выбора функции и постоянных $c_k$: $a(s; \sigma) \equiv a(s)$; условие (10) принимает вид

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{a(s)}\sigma(s)\, ds = 0. \tag{11}$$

В частности, если поле $R$ вдоль края совпадает с полем направлений, сопряженных с касательными к краю поверхностей второго порядка, то условие (11) принимает вид

$$\int\limits_0^{2\pi} \sigma(s)\, ds = 0. \tag{12}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Если $\Delta_L\vartheta=0$, то при условиях* $(3_1)$ $(2_1)$ *поверхность нежестка тогда и только тогда, когда функция* $\sigma(s)$ *удовлетворяет условию* (10).

Рассмотрим теперь случай $\Delta_L\vartheta = +2\pi$. В этом случае $\operatorname{Ind}(\alpha + i\beta)=0$ и краевая задача (1), (3) разрешима для любой функции $\sigma(s)$; решение зависит от 1 параметра. Аналогично предыдущему можно получить интегральное представление для решения задачи (1), (3):

$$w(z) = e^{i\gamma(z,\widetilde{w})}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\omega_1(s,\widetilde{w})}\sigma(s)\frac{e^{is}+z}{e^{is}-z}\,ds + i\beta_0\right\}.$$

Отсюда вытекает, что условия (2) выполняются тогда и только тогда, когда

$$\beta_0 = 0,\quad \int_0^{2\pi} e^{\omega_1(s,\widetilde{w})}\sigma(s)\,ds = 0,\quad \int_0^{2\pi} e^{\omega_1(s,\widetilde{w})}\sigma(s)\,e^{is}ds = 0. \tag{13}$$

Оператор $\omega_1(s, \widetilde{w})$ строится по заданной функции $\sigma(s)$ для данной поверхности и заданного поля направлений $R$, поэтому можем положить, $\omega_1(s, \widetilde{w}) \equiv a(s;\sigma)$. Необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (1), (2), (3) имеют вид

$$\int_0^{2\pi} e^{a(s;\sigma)}\sigma(s)\,ds = 0,\quad \int_0^{2\pi} e^{a(s;\sigma)}\sigma(s)\cos s\,ds = 0,\quad \int_0^{2\pi} e^{a(s;\sigma)}\sigma(s)\sin s\,ds = 0. \tag{14}$$

Для поверхностей второго порядка и поля направлений $R$ $dx=0$ или $dy=0$ вдоль края эти условия упрощаются:

$$\int_0^{2\pi}\sigma(s)\,ds = 0,\quad \int_0^{2\pi}\sigma(s)\cos s\,ds = 0,\quad \int_0^{2\pi}\sigma(s)\sin s\,ds = 0.$$

Таким образом, доказана теорема.

Т е о р е м а 2. *Если $\Delta_L\vartheta=2\pi$, то при условиях* $(3_1)$ $(2_1)$ *поверхность нежестка тогда и только тогда, когда функция* $\sigma(s)$ *удовлетворяет условиям* (14).

4. Ж е с т к о с т ь  п о в е р х н о с т е й  п р и  о д н о с т о р о н н и х  в т у л о ч н ы х  с в я з я х. Пусть край $L$ поверхности $S$ лежит на некоторой гладкой поверхности $\Sigma$, и кривая $L$ является граничной кривой поверхности $\Sigma$. Пусть, далее, при бесконечно малых изгибаниях поверхности $S$ край $L$ скользит по поверхности $\Sigma$, т. е. точки края $L$ не покидают поверхность $\Sigma$. В таком случае будем говорить, что поверхность $S$ подчинена односторонней втулочной связи.

Пусть поверхность $S$, $\Sigma$ и кривая $L$ ориентированы так, что при обходе по $L$ поверхности $S$ и $\Sigma$ лежат слева. Обозначим через $\theta$ угол между поверхностями $S$ и $\Sigma$, т. е. угол между нормалями $\overline{\boldsymbol{n}}_s$ и $\overline{\boldsymbol{n}}_\Sigma$ к поверхности $S$ и $\Sigma$: $\cos\theta = \overline{\boldsymbol{n}}_s\overline{\boldsymbol{n}}_\Sigma$, при этом не нарушая общности, считаем, что $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. Очевидно, что угол $\theta$ является функцией длины дуги кривой $L$.

Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 3. *Если угол $\theta$ вдоль контура $L$ изменяется в пределах $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ или $\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi$, то поверхность $S$ при односторонней втулочной связи жестка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\alpha$ плоскость, касательную к $\Sigma$ в точке $M$ кривой $L$. Так как поверхность $S$ подчинена односторонней втулочной связи, то вектор смещения $\bar{z}$ точки $M$ при бесконечно малом изгибании поверхности $S$ лежит в плоскости $\alpha$ и составляет с направленной касательной к кривой $L$ угол $\chi$, $0\leqslant\chi\leqslant\pi$ (отсчет угла производим от касательной до вектора $\bar{z}$ против хода часовой стрелки). Выберем на поверхности $S$ вдоль кривой $L$ в качестве векторого поля $\bar{e}$ векторы $\bar{\eta}_s$ тангенциальной нормали кривой $L$. При этом $\Delta_L \vartheta = 0$. Обозначим через $\bar{\eta}_\Sigma$ тангенциальную нормаль кривой $L$ на поверхности $\Sigma$. Имеем

$$\bar{z} = \frac{d\bar{r}}{ds}\cos\chi + \bar{\eta}_\Sigma \sin\chi.$$

Подсчитаем скалярное произведение $\bar{z}\bar{e}$: $\bar{z}\bar{e} \equiv \bar{z}\bar{\eta}_s = \left(\frac{d\bar{r}}{ds}\cos\chi + \bar{\eta}_\Sigma \sin\chi\right) \times$ $\times\, \bar{\eta}_s = \bar{\eta}_\Sigma \bar{\eta}_s \sin\chi = \cos\theta \sin\chi$, где $0 \leqslant \chi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ или $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Таким образом, рассматриваемые односторонние втулочные связи порождают условие $\bar{z}\bar{e} = \sigma(s)$, где $\sigma(s) \geqslant 0$ или $\sigma(s) \leqslant 0$ на $L$, при $\Delta_L \vartheta = 0$. Для нежесткости поверхности необходимо и достаточно выполнения условий

$$\int_0^{2\pi} e^{a(s;\sigma)} \sigma(s)\, ds = 0 \text{ и } \sigma(s) \not\equiv 0 \text{ на } L.$$

Так как $a(s, \sigma)$ — вещественная функция и $\sigma(s)$ на контуре не меняет знак, то интегральное условие выполняется лишь при $\sigma(s) \equiv 0$, но тогда поверхность $S$ жестка.

5. Жесткость поверхностей с теневыми границами. Пусть край $L$ поверхности $S$ является линией тени. Линией тени точки $V$ на поверхности $S$ мы называем линию касания поверхности $S$ с описанной конической поверхностью, имеющей вершину в точке $V$. Эта линия отделяет освещенную часть поверхности от неосвещенной, если $V$ — светящаяся точка.

Теорема 4. *Пусть при бесконечно малых изгибаниях поверхности $S$ с теневой границей $L$ расстояние точек края от вершины $V$ не увеличивается или не уменьшается. Тогда поверхность $S$ жестка.*

Доказательство. Пусть вершина конуса $V$ находится в начале координат. Выберем в качестве векторного поля $\bar{e}$ на поверхности вдоль края вектор $\bar{r} = \bar{r}(s)$, т. е. радиус-вектор кривой $L$. Очевидно, что $\Delta_L \vartheta = 0$. В самом деле, направления $\bar{r}(s)$ и $\frac{d\bar{r}(s)}{ds}$ являются сопряженными (в силу теоремы Кенигса), и потому при отображении на параметрическую плоскость $x$, $y$ они переходят в ортогональные направления. Следовательно, при обходе по контуру $\Gamma$ в параметрической плоскости приращение угла между образами векторов $\bar{r}(s)$ и $\frac{d\bar{r}(s)}{ds}$ равно нулю. Так как $\Delta_L \vartheta$ — топологический инвариант, то $\Delta_L \vartheta = 0$.

Вычислим вариацию расстояния $d$ точки $M$, $M \in L$, от вершины $V$ при бесконечно малом изгибании поверхности $S$:

$$\delta d = \delta|\bar{r}| = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|\bar{r} + \varepsilon\bar{z}| - |\bar{r}|}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{[|\bar{r}| + \varepsilon(\bar{r}\bar{z})]\sqrt{1 + O(\varepsilon^2)} - |\bar{r}|}{\varepsilon} = (\bar{z}\bar{r}).$$

Так как по предположению на краю $\delta d \geqslant 0$ или $\delta d \leqslant 0$, то для вектора $\bar{z}$ получаем условие

$$\bar{r}\bar{z} = \sigma(s), \text{ где } \sigma(s) \geqslant 0 \text{ или } \sigma(s) \leqslant 0,\ \Delta_L \vartheta = 0.$$

В силу теоремы 1, получаем жесткость поверхности $S$. Теорема доказана.

Если вершина $V$ находится в бесконечности, то конусы тени переходят в цилиндры, образующие которых перпендикулярны некоторой плоскости $\alpha$, не имеющей общих точек с поверхностью $S$. В качестве предельного случая теоремы 4 получаем следующее предложение.

Теорема 5. *Пусть при бесконечно малых изгибаниях поверхности $S$ с теневой границей $L$ (линия тени от параллельных пучков лучей) расстояние точек края от плоскости $\alpha$ не уменьшается или не увеличивается. Тогда поверхность $S$ жестка.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, М., 1959.
2. А. В. Погорелов, Бесконечно малые изгибания общих выпуклых поверхностей, Изд-во Харьковск. ун-та, 1959.

Поступила 18.V 1963 г.
Ростов-на-Дону