1965 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, т. XVII, № 1
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Принцип усреднения в нелинейной механике применительно к счетным системам уравнений

О. А. Жаутыков

Принцип усреднения в нелинейной механике, разработанный Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым, заключается в следующем.

Пусть движение системы с n степенями свободы описывается дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx_k}{dt} = \varepsilon X_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

или в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x), \tag{1}$$

где ε — малый параметр. Предполагается, что для всех значений x, принадлежащих некоторой области G n-мерного эвклидова пространства, существует среднее по времени t значение

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x)\, dt = X_0(x).$$

Наряду с уравнением (1) рассматривается уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon X_0(y) \tag{2}$$

и решение уравнения (1) приближенно заменяют решением уравнения (2).

Задача обоснования принципа усреднения заключается в определении условий, при которых $|x(t) - y(t)|$ может быть сколь угодно малой на сколь угодно большом, но все же конечном промежутке времени. Здесь $x(t)$ и $y(t)$ суть решения соответственно уравнений (1) и (2), удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям: $x(0) = y(0) = x_0$.

При более общих предположениях, налагаемых на правую часть уравнения (1), обоснование принципа усреднения установил Н. Н. Боголюбов [1]. Эта теорема Н. Н. Боголюбова послужила поводом для многих обобщений и исследований.

И. И. Гихманом в работе [2] показано, что теорема Н. Н. Боголюбова об обосновании принципа усреднения может быть рассмотрена как следствие одной обобщенной теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x, \lambda) \tag{3}$$

от параметра λ. Здесь $F(t, x, \lambda)$ — функция, принимающая значения в n-мерном линейном пространстве E^n, определенная для значений аргументов

$$t \in [0, T), \quad x \in G, \quad \lambda \in \Lambda.$$

Результаты И. И. Гихмана были обобщены М. А. Красносельским и и С. Г. Крейном [3]. Они обобщали результат Гихмана за счет ослабления условий на отображение $(t, x) \to F(t, x, \lambda)$, сохранив при этом условие интегральной непрерывности по параметру λ в точке λ_0.

Дальнейшее обобщение теоремы о непрерывной зависимости решения уравнения (3) рассматривалось в работе Антосевича [4]. В этой работе F — функция со значениями, принадлежащими вещественному банахову пространству, определенная на множестве $[0, T) \times G \times \Lambda$. Автор доказывает непрерывную зависимость решения уравнения (3) в предположении, что для каждого $\lambda \in \Lambda$ отображение $(t, x) \to f(t, x, \lambda)$ непрерывно в $[0, T) \times G$, для некоторого $\lambda_0 \in \Lambda$ существует решение $u_0(t)$ уравнения (3), которое определено в $[0, T)$ и имеет значения в G и существует окрестность Γ_0 точки λ_0 в Λ такая, что для всякого $\lambda_0 \in \Gamma_0$ уравнение (3) допускает решение $u(t)$, существующее в некотором интервале $[0, T(\lambda)) \subset [0, T)$, и удовлетворяющее условию $u(0) = u_0(0)$. Кроме того, предполагается выполнение интегральной непрерывности в смысле И. И. Гихмана.

Автор, аппроксимируя в некотором замкнутом интервале $[0, T_0] \subset [0, T)$ функцию $u_0(t)$ ступенчатой функцией $\hat{u}(t)$, удовлетворяющей условию $\hat{u}(0) = u_0(0)$, решает задачу: как выполнить эту аппроксимацию, чтобы оператор $\int\limits_0^t f[s, \hat{u}(s), \lambda_0]\, ds$ аппроксимировал оператор $\int\limits_0^t f[s, u(s), \lambda_0]\, ds$ в каждой точке $t \in [0, T_0]$. С решением этой задачи связан основной вопрос о непрерывной зависимости решения уравнения (3) от параметра.

Целью настоящей статьи является нахождение условий, позволяющих перенести результаты И. И. Гихмана на счетную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, x_2, \ldots; \lambda) \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

содержащую параметр λ в пространстве C^∞, точкой которого является счетная совокупность непрерывных функций, равномерно ограниченных некоторым числом.

Решение вопроса о непрерывной зависимости решений системы уравнений (4) в некоторой мере связано с компактностью оператора

$$x_k(t, \lambda) = x_k^0 + \int\limits_0^t f_k[\tau, x(\tau), \lambda]\, d\tau \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Поэтому одна из задач данной статьи заключается в указании условия, обеспечивающего вполне непрерывность оператора (5).

Выполнение этого условия и других побочных условий позволяет перенести теорему И. И. Гихмана на счетную систему уравнений (4).

Необходимость рассмотрения принципа усреднения в нелинейной механике для счетных систем уравнений вызвана тем, что многие вопросы теории колебаний приводятся к счетным системам дифференциальных уравнений. Но несмотря на это еще мало изучен вопрос обоснования принципа усреднения для счетных систем дифференциальных уравнений.

Ф. С. Лось [5] рассматривал принцип усреднения для счетных систем дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. Он доказал теорему об обосновании принципа усреднения для таких систем в предположении, что наряду с условиями равномерной ограниченности правых частей рассматриваемой системы в некоторой области гильбертова пространства, существует среднее значение по явно входящему времени t и выполняется условие Липшица с постоянной, не зависящей от t.

Мы в своей работе, следуя тому же методу, что и в работе [2], выводим принцип усреднения для счетных систем уравнений из непрерывной зависимости решений этих систем от параметра в пространстве C^∞.

Рассмотрим теперь счетную систему дифференциальных уравнений, содержащую параметр,

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, x_2, \ldots; \lambda) \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

где функции $f_k(t, x_1, x_2, \ldots; \lambda)$ заданы в области H

$$D: \sup[\,|x_1|, |x_2|, \ldots\,] \leqslant R, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad \lambda \in \Lambda$$

и Λ — некоторое множество значений параметра λ, для которого λ_0 является предельной точкой.

Теорема. 1 *Пусть правые части системы дифференциальных уравнений (4) удовлетворяют следующим условиям:*

1) функции $f_k(t, x_1, x_2, \ldots; \lambda)$ равномерно непрерывны по каждому аргументу t и $x = (x_1, x_2, \ldots)$ $(t \in [0, T], x \in D)$;

2) функции $f_k(t, x_1, x_2, \ldots; \lambda)$ удовлетворяют в области H относительно $x_1, x_2, \ldots$ условию Коши—Липшица в форме

$$|f_k(t, x_1', x_2', \ldots; \lambda) - f_k(t, x_1'', x_2'', \ldots; \lambda)| \leqslant K\Delta u \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

с константой K, не зависящей от t, λ. Здесь

$$\Delta u = \sup[\,|x_1' - x_1''|, \quad |x_2' - x_2''|, \ldots];$$

3) функции $f_n(t, x_1, x_2, \ldots; \lambda)$ в области H удовлетворяют условиям

$$|f_n(t, x_1, x_2, \ldots; \lambda)| \leqslant \alpha_n, \tag{6}$$

где $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Тогда оператор, порождаемый выражениями

$$x_k(t, \lambda) = x_k^0 + \int_0^t f_k[\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \ldots; \lambda]\, d\tau \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

вполне непрерывен по отношению к совокупности функций, удовлетворяющих условию

$$\sup_{n,t}[\,|x_1(t)|, \ |x_2(t)|, \ldots\,] \leqslant R$$

в пространстве C^∞ при фиксированном $\lambda \in \Lambda$.

Доказательство. Полагая $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, записываем систему (7) в операторной форме

$$u_k(t, \bar{x}, \lambda) = x_k^0 + \int_0^t f_k[\tau, \bar{x}(\tau); \lambda]\, d\tau \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Положим

$$\|x\| = \sup_j \max_t |x_j(t)|,$$

$$\bar{u}(t, \bar{x}, \lambda) = \{u_1, u_2, \ldots\}.$$

Рассмотрим произвольное ограниченное множество S:

$$\|x\| \leqslant r < R.$$

Покажем сначала, что оператор, порождаемый выражениями (8), непрерывен по x при фиксированном $\lambda \in \Lambda$.

В самом деле, из равенства (8) следует, что

$$|u_j(t, \bar{x}'; \lambda) - u_j(t, \bar{x}''; \lambda)| \leqslant \int_0^t |f_j(\tau, \bar{x}'; \lambda) - f_j(\tau, \bar{x}''; \lambda)|\, d\tau.$$

На основании условий (5) имеем

$$|u_j(t, \bar{x}'; \lambda) - u_j(t, \bar{x}''; \lambda)| \leqslant KT \|\bar{x}' - \bar{x}''\|.$$

Следовательно,

$$\sup_j \max_t |u_j(t, \bar{x}'; \lambda) - u_j(t, \bar{x}''; \lambda)| \leqslant K \|\bar{x}' - \bar{x}''\|,$$

т. е.

$$\|u(t, \bar{x}'; \lambda) - u(t, x''; \lambda)\| \leqslant KT \|\bar{x}' - \bar{x}''\|.$$

Если правая часть произвольно мала, то и левая часть достаточно мала.

Покажем теперь, что $u(t, \bar{x}, \lambda)$ компактен на множестве S.

Возьмем конечное число функций

$$u_1, u_2, \ldots, u_p.$$

Тогда при фиксированном j множество $\{u_j(t, \bar{x}; \lambda)\}$ компактно по теореме Арцела. Возьмем последовательность точек из сферы S и применим диагональный процесс. Существует сходящаяся последовательность

$$\bar{x}^{(1)}, \bar{x}_1^{(1)}, \bar{x}_2^{(1)}, \ldots$$

такая, что

$$u_1(t, \bar{x}^{(1)}; \lambda), u_1(t, \bar{x}_1^{(1)}; \lambda), u_1(t, \bar{x}_2^{(1)}; \lambda), \ldots$$

сходится в C (равномерно).

Из последовательности

$$\bar{x}^{(1)}, \bar{x}_1^{(1)}, \bar{x}_2^{(1)}, \ldots$$

можно выбрать сходящуюся подпоследовательность

$$\bar{x}^{(2)}, \bar{x}_1^{(2)}, \bar{x}_2^{(2)}, \ldots$$

такую, что

$$u_2(t, \bar{x}^{(2)}; \lambda), u_2(t, \bar{x}_1^{(2)}; \lambda), u_2(t, \bar{x}_2^{(2)}; \lambda), \ldots$$

сходятся в C,

и т. д.

$$u_j(t, \bar{x}^{(j)}; \lambda), u_j(t, x_1^{(j)}; \lambda), u_j(t, x_2^{(j)}; \lambda), \ldots$$

сходятся в C.

Рассмотрим теперь последовательность $\{\bar{x}^{(j)}\}$ и покажем, что $\{\bar{u}(t, \bar{x}^{(j)}; \lambda)\}$ сходится в C^∞.

По произвольному $\varepsilon > 0$ выберем N так, чтобы

$$\alpha_n < \frac{\varepsilon}{2T} \text{ при } n \geqslant N. \tag{9}$$

Из равенств (8) имеем

$$|u_j(t, \bar{x}^{(n)}; \lambda) - u_j(t, \bar{x}^{(m)}; \lambda)| = \left|\int_0^t [f_j(\tau, \bar{x}^{(n)}; \lambda) - f_j(\tau, \bar{x}^{(m)}; \lambda)]\, d\tau\right|.$$

В силу условий 3) теоремы и (9), получаем

$$|u_j(t, \bar{x}^{(n)}; \lambda) - u_j(t, \bar{x}^{(m)}; \lambda)| \leqslant 2\alpha_j T < \varepsilon \text{ при } j \geqslant N. \tag{10}$$

Так как последовательность $\{\bar{x}^{(n)}\}$, начиная с некоторого номера, содержится в любой последовательности

$$\bar{x}^{(j)}, \bar{x}_1^{(j)}, \bar{x}_2^{(j)}, \ldots,$$

то $\{u_j(t, \bar{x}^{(n)}; \lambda)\}$ сходится при любом фиксированном j, и, следовательно, при $j < N$ (конечное число индексов!) можно найти n такое, что

$$|u_j(t, \bar{x}^{(n)}; \lambda) - u_j(t, \bar{x}^{(m)}; \lambda)| < \varepsilon \tag{11}$$

при $\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \geqslant n_0$.

Из неравенств (10) и (11) мы можем заключить, что неравенство

$$|u_j(t, \bar{x}^{(n)}; \lambda) - u_j(t, \bar{x}^{(m)}; \lambda)| \leqslant \varepsilon$$

выполняется при всех j и $\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \geqslant n_0$.

Отсюда и следует, что

$$\|\bar{u}(t, \bar{x}^{(n)}; \lambda) - \bar{u}(t, \bar{x}^{(m)}; \lambda)\| < \varepsilon$$

при $\begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \geqslant n_0$.

Этим доказана компактность множества $\{u_j(t, \bar{x}; \lambda)\}$.

Теорема 2. *Пусть правые части системы уравнений* (4) *удовлетворяют следующим условиям:*

а) *функции* $f_k(t, x_1, x_2, \ldots; \lambda)$ *равномерно непрерывны по каждому аргументу* t *и* $x = (x_1, x_2, \ldots)$ $(t \in [0, T],\ x \in D)$ *и удовлетворяют для всех точек области* H *условиям:*

$$|f_n(t, x_1, x_2, \ldots; \lambda)| \leqslant \alpha_n, \tag{12}$$

где $\alpha_n \to 0$ *при* $n \to \infty$;

б) *функции* $f_k(t, x_1, x_2, \ldots; \lambda)$ *имеют в области* H *непрерывные частные производные* $\dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}$ *по переменным* $x_1, x_2, \ldots$;

в) *функции* $f_k(t, x_1, x_2, \ldots; \lambda)$ *удовлетворяют в области* H *усиленному условию Коши — Липшица, заключающемуся в том, что для всяких двух точек* $(t, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x'_m, x'_{m+1}, \ldots; \lambda)$ *и* $(t, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x''_m, x''_{m+1}, \ldots; \lambda)$ *области* H *выполняются неравенства:*

$$|f_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x'_m, x'_{m+1}, \ldots; \lambda) - f_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x''_m, x''_{m+1}, \ldots, \lambda)| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon_m \Delta u; \tag{13}$$

где $\varepsilon_m \to 0$ *при* $m \to \infty$ *и*

$$\Delta u = \sup[|x'_m - x''_m|, |x'_{m+1} - x''_{m+1}|, \ldots];$$

г) *существует равномерно относительно* x *предел*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_t^{t+t_1} f_k(\tau, x; \lambda)\, d\tau = \int_t^{t+t_1} f_k(\tau, x; \lambda_0)\, d\tau. \quad (0 \leqslant t < t + t_1 \leqslant T, \quad k = 1, 2, \ldots); \tag{14}$$

д) *счетная система дифференциальных уравнений*

$$\frac{dy_k}{dt} = f_k(t, y; \lambda_0) \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{15}$$

где $y = (y_1, y_2, \ldots)$, *имеет единственную систему решений*

$$y_k = y_k(t) \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

определенную при $0 \leqslant t \leqslant T$, *лежащую вместе с некоторой* ϱ-*окрестностью в* D *и удовлетворяющую начальным условиям*

$$x_k(0) = y_k(0) = x_k^0 \qquad (k = 1, 2, \ldots), \quad (\sup(|x_1^0|, |x_2^0|, \ldots) < R). \tag{16}$$

Тогда решения $x_k(t)$ *системы уравнений* (4), *удовлетворяющие начальным условиям* (16), *непрерывны по* λ *в точке* $\lambda = \lambda_0$, *т. е.*

$$\sup_k \max_{0 < t < T} |x_k(t) - y_k(t)| \to 0 \qquad \text{при } \lambda \to \lambda_0.$$

Доказательство. Для доказательства применяем метод, аналогичный методу в работе [2]. Из условий б) и в) вытекает выполнение обычного условия Коши — Липшица относительно $x_1, x_2, \ldots$ в форме [6]

$$|f_k(t, x_1', x_2', \ldots; \lambda) - f_k(t, x_1'', x_2'', \ldots; \lambda)| \leqslant K\Delta u \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{17}$$

где K — константа, не зависящая от t, λ и

$$\Delta u = \sup [|x_1' - x_2''|, |x_2' - x_2''|, \ldots].$$

При любом $\lambda \in \Lambda$ существует такой промежуток $[0, t_0] \subset [0, T]$, что система уравнений (4) имеет решения $x_k(t) = x_k(t, \lambda)$, удовлетворяющие начальным условиям (16), лежащие внутри D, которые эквивалентны решениям счетной системы интегральных уравнений

$$x_k(t) = x_k^0 + \int_0^t f_k(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau) \ldots; \lambda) d\tau \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0, \quad k = 1, 2, \ldots). \tag{18}$$

Пусть $t_1 > 0$ такое, что $0 < t + t_1 < t_0$. Тогда

$$x_k(t + t_1) = x_k^0 + \int_0^{t+t_1} f_k(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \ldots; \lambda)\, d\tau \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{19}$$

Из равенств (18) и (19) имеем

$$x_k(t + t_1) - x_k(t) = \int_t^{t+t_1} f_k(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \ldots; \lambda)\, d\tau, \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{20}$$

Аналогично этому для системы (15) находим

$$y_k(t + t_1) - y_k(t) = \int_t^{t+t_1} f_k(\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), \ldots; \lambda_0)\, d\tau \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{21}$$

Из равенств (20) и (21) следует, чтс

$$x_k(t + t_1) - y_k(t + t_1) = x_k(t) - y_k(t) +$$

$$+ \int_t^{t+t_1} [f_k(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \ldots; \lambda) - f_k(\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), \ldots; \lambda_0)]\, d\tau \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Положим $\qquad \delta(t) = \sup\limits_k \max\limits_t |x_k(t) - y_k(t)|$. Тогда

$$\delta(t + t_1) \leqslant \delta(t) + \int_t^{t+t_1} |f_k(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \ldots; \lambda) - f_k(\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), \ldots; \lambda_0)|\, d\tau$$

или

$$\delta(t + t_1) \leqslant \delta(t) + \int_t^{t+t_1} |f_k(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \ldots; \lambda) - f(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \ldots, x_{m-1}(\tau), x_m'(\tau),$$

$$x_{m+1}(\tau), \ldots ; \lambda) \mid d\tau + \int_{t}^{t+t_1} \mid f_k(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \ldots, x_{m-1}(\tau), x'_m(\tau), x'_{m+1}(\tau), \ldots ;\lambda) \mid d\tau +$$

$$+ \int_{t}^{t+t_1} \mid f_k(\tau, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{m-1}(t), x_m(t), x_{m+1}(t), \ldots ; \lambda) \mid d\tau +$$

$$+ \int_{t}^{t+t_1} \mid f_k(\tau, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{m-1}(t), x_m(t), x_{m+1}(t), \ldots ; \lambda) -$$

$$- f_k(\tau, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{m-1}(t), x_m(t), x_{m+1}(t), \ldots ; \lambda_0) \mid d\tau +$$

$$+ \int_{t}^{t+t_1} \mid f_k(\tau, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{m-1}(t), x_m(t), x_{m+1}(t), \ldots ; \lambda_0) -$$

$$- f_k(\tau, y_1, (t), y_2(t), \ldots, y_{m-1}(t), y_m(t), y_{m+1}(t), \ldots ; \lambda_0) \mid d\tau +$$

$$+ \int_{t}^{t+t_1} \mid f_k(\tau, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_{m-1}(t), y_m(t), y_{m+1}(t), \ldots ; \lambda_0) -$$

$$- f_k(\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), \ldots, y_{m-1}(\tau), y_m(\tau), y_{m+1}(\tau), \ldots ; \lambda_0) \mid d\tau.$$

В силу условий (12), (13) и (17), имеем

$$\delta(t + t_1) \leqslant \delta(t) + \varepsilon_m \Delta u + 2\alpha_k t_1 + \int_{t}^{t+t_1} \mid f_k(\tau, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{m-1}(t), x_m(t),$$

$$x_{m+1}(t), \ldots ; \lambda) - f_k(\tau, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{m-1}(t), x_m(t), x_{m+1}(t), \ldots ; \lambda_0) \mid d\tau +$$

$$+ Kt_1 \delta(t) + 2\alpha_k t_1. \tag{22}$$

На основании теоремы 1, множество, состоящее из элементов

$$\int_{t}^{t+t_1} [f_k(\tau, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m, \ldots ; \lambda) - f_k(\tau, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m, \ldots ; \lambda_0)] \, d\tau,$$

компактно. Следовательно, учитывая условия (14), мы можем сказать, что это множество равномерно сходится к нулю на D при $\lambda \to \lambda_0$, т. е. для любого сколь угодно малого $\eta > 0$ можно найти такое $\varepsilon > 0$, что

$$\Big| \int_{t}^{t+t_1} [f_k(\tau, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m, \ldots ; \lambda) -$$

$$- f_k(\tau, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m, \ldots ; \lambda_0)] \, d\tau \Big| < \frac{\eta}{2} \tag{23}$$

для всех $x \in D$.

Так как $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$, то для любого заданного $\eta > 0$ можно указать столь большое n_0, что

$$\varepsilon_m \Delta u < \frac{\eta}{2} \text{ при } m > n_0 \tag{24}$$

На основании (23) и (24), неравенство (22) принимает вид

$$\delta(t + t_1) \leqslant \delta(t)(1 + Kt_1) + \eta + 4\alpha_k t_1.$$

Мы пришли к оценке, аналогичной оценке работы [2]. Дальше, поступая также, как в этой работе, можем заключить, что $\delta(t)$ становится сколь угодно малой при $\lambda \to \lambda_0$, т. е.

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \sup_{k} \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \mid x_k(t) - y_k(t) \mid \to 0 \text{ или } \lim_{\lambda \to \lambda_0} x_k(t, \lambda) = x_k(t, \lambda_0) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Рассмотрим теперь счетную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = \varepsilon f_k(t, x) \qquad (k = 1, 2, \dots), \tag{25}$$

где ε — малый параметр, а $x = (x_1, x_2, \dots)$ и $f_k(t, x)$ — функции счетного числа переменных, определенные для всех неотрицательных значений t ($0 \leqslant t < \infty$) и для значений $x_1, x_2, \dots$ из области D,

$$\sup [\, |x_1|, |x_2|, \dots] \leqslant R.$$

Предположим, что для всех значений $x \in D$ существуют средние по времени значения

$$\lim_{A \to \infty} \frac{1}{A} \int_0^A f_k(t, x)\, dt = \Phi_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{26}$$

Рассмотрим системы уравнений (25) и

$$\frac{dy_k}{dt} = \varepsilon \Phi_k(y) \qquad (k = 1, 2, \dots), \tag{27}$$

где $y = (y_1, y_2, \dots)$ при одинаковых начальных условиях

$$x_k(0) = y_k(0) = x_k^0 \qquad (k = 1, 2, \dots). \tag{28}$$

Если в уравнениях (25) и (27) произвести замену $\frac{\tau}{\varepsilon} = t$, $\varepsilon = \lambda$, а затем доопределить правые части системы, полученной после замены, полагая

$$f_k\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x\right)\Big|_{\varepsilon=0} = \Phi_k,$$

то теорема Н. Н. Боголюбова об обосновании принципа усреднения в нелинейной механике применительно к бесконечным системам уравнений (25) и (27) может быть сформулирована так.

Теорема 3. *Пусть*

а) *правые части системы уравнений* (25) *удовлетворяют условиям* 1), 2) и 3) *теоремы* 1 *относительно* $0 \leqslant t < \infty$, $x \in D$;

б) *предел* (26) *существует для всех* $x \in D$;

в) *при* $\varepsilon = 1$ *система уравнений* (27) *имеет единственное решение* $y_k(t)$, *удовлетворяющее начальным условиям* (28), *определенное при* $0 \leqslant t \leqslant T$ *и лежащее вместе с некоторой своей окрестностью в области* D.

Тогда для любого $\eta > 0$ *можно указать такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, *решения* $x_k(t)$ *системы уравнений* (25), *удовлетворяющие начальным условиям* (28), *отличаются от решений* $y_k(t)$ *меньше чем на* η, *на достаточно большом, но все же конечном, отрезке* $\left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, О некоторых статистических методах в математической физике, Изд-во АН УССР, К., 1945.
2. И. И. Гихман, По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова, УМЖ, т. IV, № 2, 1952, 215—218.
3. М. А. Красносельский и С. Г. Крейн, О принципе усреднения в нелинейной механике, УМН, т. X, вып. 3 (65), 1955, 147—152.
4. H. A. Antosiewicz, Continuons parameter dependence and the method of aferaging, Тр. Междунар. симпоз. по нелин. колеб., т. I, Изд-во АН УССР, К., 1963.
5. Ф. С. Лось, О принципе усреднения для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве, УМЖ, т. II, № 3, 1950, 87—93.
6. К. П. Персидский, Об одной счетной системе уравнений с частными производными, ПММ, т. XIV, 1950, 23—44.

Поступила 13.IX 1963 г.
Алма-Ата