Об одном методе решения линейных интегральных уравнений типа Вольтерра

Н. И. Тукалевская, А. В. Нестерчук

1

Рассмотрим линейное неоднородное интегральное уравнение второго рода типа Вольтерра

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x, s)\varphi(s)\,ds, \tag{1}$$

где данная функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $0 \leqslant x \leqslant 1$, а функция $K(x, s)$ является ограниченным ядром первого рода (непрерывным почти всюду) в области R: $0 \leqslant s \leqslant x \leqslant 1$ [2,7]. В дальнейшем все переменные, входящие в рассмотрение, будем считать действительными.

Ядро $K(x, s)$ представим в виде

$$K(x, s) = \sum_{k=1}^{m} X_k(x) Y_k(s) + D(x, s), \tag{2}$$

где $X_k(x)$, $Y_k(s)$ и $D(x, s)$ — непрерывные почти всюду функции своих аргументов в рассматриваемой области R (см. [1], стр. 130).

На основании (2) уравнение (1) запишем в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{m} X_k(x) M_k(x) + \int_0^x D(x, s)\varphi(s)\,ds, \tag{1'}$$

где

$$M_k(x) = \int_0^x Y_k(s)\varphi(s)\,ds. \tag{3}$$

Для упрощения дальнейших выкладок введем обозначения:

$$f_n(x) = f(x) + \int_0^x D(x, s)\varphi_{n-1}(s)\,ds; \tag{4}$$

$$^{(i)}M_k(x) = \int_0^x Y_k(s)\varphi_i(s)\,ds \quad (i = 0, 1, \ldots, n, \ldots), \tag{5}$$

где $\varphi_i(x)$ — последовательные приближения, которые будем строить следующим образом.

В нулевом приближении положим [5]

$$\varphi_0(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{m} X_k(x)\, ^{(0)}M_k(x). \tag{6_0}$$

Умножая (6_0) на $Y_r(x)$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$ и учитывая (5), получим систему дифференциальных уравнений

$$ {}^{(0)}M_r'(x) = Y_r(x) \sum_{k=1}^{m} X_k(x)\, {}^{(0)}M_k(x) + Y_r(x)\, f(x), \tag{7_0} $$

$$ {}^{(0)}M_r(0) = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, m), $$

из которой определим ${}^{(0)}M_k(x)$.

В n-м приближении положим

$$ \varphi_n(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{m} X_k(x)\, {}^{(n)}M_k(x) + \int_0^x D(x, s)\, \varphi_{n-1}(s)\, ds = $$

$$ = f_n(x) + \sum_{k=1}^{m} X_k(x)\, {}^{(n)}M_k(x). \tag{6_n} $$

Функции ${}^{(n)}M_k(x)$ определим из системы дифференциальных уравнений

$$ \left.\begin{aligned} {}^{(n)}M_r'(x) &= Y_r(x) \sum_{k=1}^{m} X_k(x)\, {}^{(n)}M_k(x) + Y_r(x)\, f_n(x), \\ {}^{(n)}M_r(0) &= 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, m), \end{aligned}\right\} \tag{7_n} $$

полученной аналогично системе (7_0).

Подставляя значения функций ${}^{(n)}M_k(x)$ в (6_n), найдем $\varphi_n(x)$.

2

Для доказательства сходимости изложенного в п. 1 процесса достаточно показать сходимость ряда

$$ \varphi_0(x) + (\varphi_1(x) - \varphi_0(x)) + (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) + \ldots + (\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)) + \ldots, \tag{8} $$

n-я частная сумма которого равна $\varphi_n(x)$.

Введем обозначения:

$$ \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)| = \alpha; \qquad \max_k \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |X_k(x)| = \delta; $$

$$ \sup_R |D(x, s)| = q; \qquad \max_k \sup_{0 \leqslant s \leqslant 1} |Y_k(s)| = \gamma. $$

Из равенств (6_0) и (5) имеем

$$ |\varphi_0(x)| \leqslant |f(x)| + m\delta\gamma \int_0^x |\varphi_0(s)|\, ds. \tag{9} $$

Обозначив $\int_0^x |\varphi_0(s)|\, ds = u(x)$, из (9) получаем дифференциальное неравенство

$$ u'(x) \leqslant |f(x)| + m\delta\gamma u(x). $$

Решая дифференциальное уравнение

$$ v(x) = |f(x)| + m\delta\gamma\, v(x), \quad v(0) = 0 $$

и применяя теорему Чаплыгина о дифференциальных неравенствах (см. [3], стр. 15), найдем оценку для $u(x)$:

$$ \int_0^x |\varphi_0(s)|\, ds = u(x) \leqslant e^{m\delta\gamma x} \int_0^x e^{-m\delta\gamma t} |f(t)|\, dt, \tag{10} $$

т. е.

$$\int_0^x |\varphi_0(s)|\,ds \leqslant \frac{\alpha}{m\delta\gamma}(e^{m\delta\gamma x}-1). \tag{11}$$

Подставляя (11) в (9), окончательно получим

$$|\varphi_0(x)| \leqslant \alpha e^{m\delta\gamma x}. \tag{12}$$

Из равенств (6_0) и (6_n) при $n=1$ имеем

$$|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)| \leqslant |f_1(x)-f(x)| + \sum_{k=1}^{m} |X_k(x)|\,|{}^{(1)}M_k(x) - {}^{(0)}M_k(x)|. \tag{13}$$

Согласно (4) сразу определим:

$$|f_1(x)-f(x)| = \left|\int_0^x D(x,s)\,\varphi_0(s)\,ds\right| \leqslant \frac{\alpha q}{m\delta\gamma}(e^{m\delta\gamma x}-1). \tag{14}$$

Так как согласно (5)

$$|{}^{(1)}M_k(x) - {}^{(0)}M_k(x)| \leqslant \int_0^x |Y_k(s)|\,|\varphi_1(s)-\varphi_0(s)|\,ds \leqslant \gamma\int_0^x |\varphi_1(s)-\varphi_0(s)|\,ds,$$

то из (13) имеем

$$|\varphi_1(s)-\varphi_0(s)| \leqslant |f_1(x)-f(x)| + m\delta\gamma\int_0^x |\varphi_1(s)-\varphi_0(s)|\,ds. \tag{15}$$

Из последнего неравенства получим оценку для $\int_0^x |\varphi_1(s)-\varphi_0(s)|\,ds$, аналогичную оценке (10):

$$\int_0^x |\varphi_1(s)-\varphi_0(s)|\,ds \leqslant e^{m\delta\gamma x}\int_0^x e^{-m\delta\gamma t}\,|f_1(t)-f(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha q}{m^2\delta^2\gamma^2}\,[m\delta\gamma x e^{m\delta\gamma x} - (e^{m\delta\gamma x}-1)]. \tag{16}$$

Подставляя (14) и (16) в (15), окончательно находим

$$|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)| \leqslant \alpha q x e^{m\delta\gamma x}. \tag{17}$$

Теперь покажем, что для любого целого положительного n справедливо неравенство

$$|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)| \leqslant \alpha q^n \frac{x^n}{n!} e^{m\delta\gamma x}. \tag{18}$$

Допустив, что неравенство (18) справедливо для n, докажем его справедливость для $n+1$. Согласно (6_n) имеем

$$|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)-f_n(x)| + \sum_{k=1}^{m} |X_k(x)|\,|{}^{(n+1)}M_k(x) - {}^{(n)}M_k(x)|. \tag{19}$$

Из (5) и (18) находим

$$|f_{n+1}(x)-f_n(x)| \leqslant \int_0^x |D(x,s)|\,|\varphi_n(s)-\varphi_{n-1}(s)|\,ds \leqslant \alpha q^{n+1}\int_0^x \frac{t^n}{n!} e^{m\delta\gamma t}\,dt =$$

$$= \frac{\alpha q^{n+1}}{(m\delta\gamma)^{n+1}} \left[\frac{(m\delta\gamma x)^n}{n!} e^{m\delta\gamma x} - \frac{(m\delta\gamma x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{m\delta\gamma x} + \ldots + (-1)^n m\delta\gamma x e^{m\delta\gamma x} + \right.$$

$$\left. + (-1)^{n+1} (e^{m\delta\gamma x} - 1) \right]. \qquad (20)$$

Так как

$$|{}^{(n+1)}M_k(x) - {}^{(n)}M_k(x)| \leqslant \int_0^x |Y_k(s)| |\varphi_{n+1}(s) - \varphi_n(s)| ds \leqslant \gamma \int_0^x |\varphi_{n+1}(s) -$$

$$- \varphi_n(s)| ds,$$

то из (19) имеем

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x) - f_n(x)| + m\delta\gamma \int_0^x |\varphi_{n+1}(s) - \varphi_n(s)| ds. \qquad (21)$$

Из последнего неравенства получим аналогичную (10) оценку для $\int_0^x |\varphi_{n+1}(s) - \varphi_n(s)| ds$:

$$\int_0^x |\varphi_{n+1}(s) - \varphi_n(s)| ds \leqslant e^{m\delta\gamma x} \int_0^x e^{-m\delta\gamma t} |f_{n+1}(t) - f_n(t)| dt \leqslant \qquad (22)$$

$$\leqslant \alpha \frac{q^{n+1}}{(m\delta\gamma)^{n+2}} \left[\frac{(m\delta\gamma x)^{n+1}}{(n+1)!} e^{m\delta\gamma x} - \frac{(m\delta\gamma x)^n}{n!} e^{m\delta\gamma x} + \ldots + (-1)^{n+1} m\delta\gamma x e^{m\delta\gamma x} + \right.$$

$$\left. + (-1)^{n+2} (e^{m\delta\gamma x} - 1) \right].$$

Подставляя (20) и (22) в (21), получаем

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leqslant \alpha q^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{m\delta\gamma x}, \qquad (23)$$

т. е. неравенство (18) справедливо для $n+1$. А так как оно справедливо для $n = 1$, то оно верно для каждого натурального числа n.

Таким образом, так как каждый член ряда (8) по абсолютной величине не превышает соответствующего члена сходящегося числового ряда с положительными членами

$$\alpha e^{m\delta\gamma} + \alpha q e^{m\delta\gamma} + \alpha \frac{q^2}{2!} e^{m\delta\gamma} + \ldots + \alpha \frac{q^n}{n!} e^{m\delta\gamma} + \ldots,$$

то ряд (8) сходится абсолютно и равномерно для всех x из заданного промежутка $[0,1]$ к функции $\varphi(x)$, которая, как нетрудно убедиться, удовлетворяет уравнению (1).

Теперь определим погрешность n-го приближения. Так как

$$|\varphi(x) - \varphi_n(x)| \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} |\varphi_i(x) - \varphi_{i-1}(x)| \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

то из (18) получим

$$|\varphi(x) - \varphi_n(x)| \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha \frac{q^i x^i}{i!} e^{m\delta\gamma x} = \alpha e^{m\delta\gamma x} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{q^i x^i}{i!}. \qquad (24)$$

Более грубая, но вместе с тем более удобная при вычислениях оценка погрешности имеет вид

$$|\varphi(x) - \varphi_n(x)| \leqslant \alpha \frac{q^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!} e^{m\delta\gamma x} \frac{1}{1 - \dfrac{qx}{n+2}}, \qquad (25)$$

при этом предполагается, что n настолько велико, что $qx < n + 2$.

Систему дифференциальных уравнений (7_n) можно решать одним из приближенных или численных методов. Мы предлагаем решать ее с помощью операторов численного интегрирования, введенных в работах [4, 6].

Пример. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{23}{24}x^4 + \frac{1}{1+x} + \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)\ln(1+x) +$$

$$+ \int_0^x \left(x^2 s + x s^2 + \frac{1}{2}s^3\right)\varphi(s)\,ds,$$

имеющее решением функцию $\varphi(x) = 1 + \dfrac{1}{1+x}$.

Применяя изложенный в п. 1 метод, положим в нулевом приближении

$$\varphi_0(x) = f(x) + X_1(x)\,{}^{(0)}M_1(x) + X_2(x)\,{}^{(0)}M_2(x). \tag{26}$$

Функции ${}^{(0)}M_k(x)$ $(k = 1, 2)$ определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &{}^{(0)}M_1'(x) - Y_1(x)X_1(x)\,{}^{(0)}M_1(x) - Y_1(x)X_2(x)\,{}^{(0)}M_2(x) = Y_1(x)f(x), \\ &{}^{(0)}M_2'(x) - Y_2(x)X_1(x)\,{}^{(0)}M_1(x) - Y_2(x)X_2(x)\,{}^{(0)}M_2(x) = Y_2(x)f(x), \end{aligned} \tag{27}$$

которую решаем численно. Интегрируя систему (27), получим

$$\begin{aligned} &{}^{(0)}M_1(x) - \int_0^x Y_1(s)X_1(s)\,{}^{(0)}M_1(s)\,ds - \int_0^x Y_1(s)X_2(s)\,{}^{(0)}M_2(s)\,ds = \\ &\qquad = \int_0^x Y_1(s)f(s)\,ds + {}^{(0)}M_1(0), \\ &{}^{(0)}M_2(x) - \int_0^x Y_2(s)X_1(s)\,{}^{(0)}M_1(s)\,ds - \int_0^x Y_2(s)X_2(s)\,{}^{(0)}M_2(s)\,ds = \\ &\qquad = \int_0^x Y_2(s)f(s)\,ds + {}^{(0)}M_2(0). \end{aligned} \tag{28}$$

Полагая $x = 0, h, 2h, \ldots, lh$; $lh = 1$, и учитывая, что ${}^{(0)}\mathrm{M}_1(0) = 0$, ${}^{(0)}M_2(x) = 0$, имеем:

$$\begin{aligned} &[{}^{(0)}M_1(x)]\,\{I - [Y_1(x)X_1(x)]_d\,hA\} - [{}^{(0)}M_2(x)]\,[Y_1(x)X_2(x)]_d\,hA \approx [Y_1(x)f(x)]\,hA, \\ &-[{}^{(0)}M_2(x)]\,[Y_2(x)X_1(x)]_d\,hA + [{}^{(0)}M_1(x)]\,\{I - [Y_2(x)X_2(x)]_d\,hA\} \approx \\ &\qquad \approx [Y_2(x)f(x)]\,hA, \end{aligned} \tag{29}$$

где

$$[{}^{(0)}M_k(x)] = [{}^{(0)}M_k(0),\ {}^{(0)}M_k(h),\ {}^{(0)}M_k(2h), \ldots, {}^{(0)}M_k(lh)] \quad (k = 1, 2),$$

$[Y_k(x)X_r(x)]_d$ — диагональная матрица, элементами которой являются числа $Y_k(ih)X_r(ih)$ $(k,r = 1, 2)$, $\left(i = 0, 1, \ldots, l;\ l = \dfrac{1}{h}\right)$, I — единичная матрица, A — оператор численного интегрирования, который строится следующим образом.

Пусть надо вычислить $\int\limits_0^x u(t)\,dt$ в точках $x = 0, h, 2h, \ldots, lh$.

При $x = h$, применяя формулу трапеций, получим

$$\int\limits_0^h u(t)\,dt \approx \frac{1}{2}(u(0) + u(h))\cdot h = \frac{1}{2}\,h\,[u_0,\,u_1]\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}; \tag{30}$$

при $x = 2h$ по формуле Симпсона (параболы второй степени) будем иметь

$$\int\limits_0^{2h} u(t)\,dt \approx \frac{1}{3}(u(0) + 4u(h) + u(2h))\cdot h = \frac{1}{3}\,h\,[u_0,\,u_1,\,u_2]\begin{Bmatrix}1\\4\\1\end{Bmatrix}; \tag{31}$$

при $x = 3h$ по формуле $\frac{3}{8}$-Ньютона (параболы третьей степени) —

$$\int\limits_0^{3h} u(t)\,dt \approx \frac{3}{8}(u(0) + 3u(h) + 3u(2h) + u(3h))\cdot h =$$

$$= \frac{3}{8}\,h\,[u_0,\,u_1,\,u_2,\,u_3]\begin{Bmatrix}1\\3\\3\\1\end{Bmatrix}; \tag{32}$$

при $x = 4h$ снова по формуле Симпсона —

$$\int\limits_0^{4h} u(t)\,dt \approx \frac{1}{3}\,h\,[u_0,\,u_1,\,u_2,\,u_3,\,u_4]\begin{Bmatrix}1\\4\\2\\4\\1\end{Bmatrix}; \tag{33}$$

при $x = 5h$ по формулам Симпсона и $\frac{3}{8}$ - Ньютона —

$$\int\limits_0^{5h} u(t)\,dt \approx \frac{1}{24}\,h\,[u_0,\,u_1,\,u_2,\,u_3,\,u_4,\,u_5]\begin{Bmatrix}8\\32\\17\\27\\27\\9\end{Bmatrix}. \tag{34}$$

Объединяя (30)—(34), можем записать

$$\Big[\int\limits_0^{ih} u(t)\,dt\Big] \approx [u(x)]\,hA,$$

где

$$[u(x)] = [u_0, u_1, u_2, \ldots, u_5], \quad u_i = u(ih)\ \ (i = 0, 1, \ldots, 5),$$

$$A = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 0 & 12 & 8 & 9 & 8 & 8\\ 0 & 12 & 32 & 27 & 32 & 32\\ 0 & 0 & 8 & 27 & 16 & 17\\ 0 & 0 & 0 & 9 & 32 & 27\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 27\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решив систему алгебраических уравнений (29), найдем первые пять значений функций ${}^{(0)}M_k(x)$ $(k = 1, 2)$. Далее, принимая в (28) за начальные значения ${}^{(0)}M_1(5h)$, ${}^{(0)}M_2(5h)$ и повторяя изложенный выше процесс, найдем остальные значения этих функций. Зная значения функций ${}^{(0)}M_k(x)$ $(k = 1, 2)$, по (26) найдем значения нулевого приближения $\varphi_0(x)$.

Первое приближение имеет вид:

$$\varphi_1(x) = f_1(x) + X_1(x)\,{}^{(1)}M_1(x) + X_2(x)\,{}^{(1)}M_2(x). \tag{35}$$

Функции ${}^{(1)}M_k(x)$ $(k = 1, 2)$ определяются из системы, аналогичной системе (27), только в правой части вместо функции $f(x)$ подставляется функция $f_1(x)$.

В результате применения обычного метода последовательных приближений получим формулы:

$$\eta_0(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{23}{24}x^4 + \frac{1}{1+x} + \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)\ln(1+x), \tag{36}$$

$$\eta_1(x) = 1 + \frac{1}{1+x} + \frac{59}{240}x - \frac{71}{96}x^2 + \frac{881}{720}x^3 - \frac{1969}{2880}x^4 + \frac{7}{3600}x^5 + \frac{1981}{3600}x^6 - \frac{46}{63}x^7 - \frac{2875}{8064}x^8 - \left[\frac{59}{240} - \frac{37}{60}x + \frac{5}{6}x^2 - \frac{23}{48}x^4 + \frac{31}{60}x^5 - \frac{8}{15}x^6\right]\ln(1+x). \tag{37}$$

В таблице приведены погрешности (в %) выражений $\varphi_0, \varphi_1, \eta_0, \eta_1$, вычисленных соответственно по формулам (26), (35), (36), (37).

	x	0,1	0,2	0,3	0.4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
Погрешности (в %)	φ_0	0,000	0,075	0,104	0,331	0,847	1,78	3,40	6,13	12,39	21,76
	φ_1	0,000	0,000	−0,004	0,007	−0,010	0,012	0,077	0,135	0,145	0,199
	η_0	0,010	0,212	0,801	2,55	6,26	13,04	24,26	21,58	66,70	101,9
	η_1	0,000	0,000	0,005	0,013	−0,021	−0,264	−1,27	−4,39	−12,47	−30,01

Здесь знак «—» указывает на приближение с недостатком, а знак «+» — на приближение с избытком.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Трикоми, Интегральные уравнения, ИЛ, 1960.
2. Ю. Д. Соколов, О приближенном решении линейных интегральных уравнений типа Вольтерра, УМЖ, т. X, № 2, 1958.
3. С. А. Чаплыгин, Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1950.
4. T. F. Bridgland, A note on numerical integrating operators, J. Soc. Industr. and Appl. Math., **6**, № 3, 1958.
5. Н. И. Тукалевская, О приближенном решении линейных интегральных уравнений типа Вольтерра, Тр. научн. конф. инж., асп., мл. научн. сотр. Ин-та матем. АН УССР, Изд-во АН УССР, К., 1964, 77—84.
6. А. В. Нестерчук, Про розв'язування лінійних диференціальних рівнянь з змінними коефіцієнтами за допомогою операторів чисельного інтегрування, Наук. зап. Житомирськ. пед. ін-ту, Житомир, 1964.
7. В. І. Тивончук, Про застосування методу Ю. Д. Соколова до розв'язування лінійних інтегральних рівнянь змішаного типу, Доп. АН УРСР, *1964, 1014*.

Поступила 11.VII 1964 г.

Киев