Подсчет деревьев, снабженных ярлыками

Н. Г. Винниченко

Вводимая ниже функция подсчета $\delta(z)$ позволяет подсчитывать количества корневых деревьев [1, 3] с ярлыками (под ярлыком понимается абстрактный символ, отнесенный к некоторой точке дерева [2]). Показано, что функция $\delta(z)$ является инвариантом дерева, если на нее наложить некоторые ограничения.

1. Пусть некоторым точкам корневого дерева B отнесены ярлыки $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$. Точки $x_1, x_2, \ldots, x_m$, к которым отнесены эти ярлыки, соединяются попарно простыми путями $\mu(x_i, x_j)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$. Общая точка z некоторых путей $\mu(x_k, x_l)$, имеющая на каждом из них минимальную высоту [3], называется точкой разветвления этих путей. Множество точек с ярлыками определит множество точек разветвления путей $\mu(x_i, x_j)$. Точки с ярлыками называются точками разветвления нулевого порядка. Точка разветвления z называется точкой разветвления k-го порядка, если она принадлежит только путям, идущим через точку z от точки A_0 к точкам разветвления низших порядков, среди которых имеется, по крайней мере, одна точка разветвления $k-1$ порядка. Точке с несколькими порядками приписывается высший ее порядок.

Функцию подсчета $\delta(z)$ зададим следующим образом:

а) В точке разветвления z нулевого порядка функция $\delta(z)$ задается: 1) высотой H точки z; 2) множеством ярлыков, отнесенных точке z.

б) В точке разветвления z k-го порядка функция $\delta(z)$ задается: 1) высотой A точки z; 2) множеством ярлыков, отнесенных точке z; 3) множеством функций подсчета, заданных в точках разветвления низших порядков, расположенных первыми после точки z на путях, идущих через точку z от точки H_0 к точкам разветвления низших порядков.

в) В точках, не являющихся точками разветвления, функция $\delta(z)$ задается: 1) высотой H точки z; 2) нулевым множеством.

Две функции

$$\delta(z) = \{H; \delta(x_1), \delta(x_2), \ldots, \delta(x_i)\},$$

$$\delta'(z') = \{H'; \delta'(x_1'), \delta'(x_2'), \ldots, \delta'(x_j')\}$$

будем считать равными, если существует такое взаимно однозначное соответствие между элементами их значений, что соответствующие элементы равны. Функцию $\delta(z)$ будем считать заданной на дереве, если точка z является точкой разветвления максимального порядка. Очевидно, что дерево имеет единственную точку разветвления максимального порядка.

2. Дерево, полученное из дерева B удалением элементов (ребер и точек), не принадлежащих путям, идущим от точки A_0 к точкам разветвления, называется реализацией функции $\delta(z)$.

Лемма. *Реализации равных функций подсчета изоморфны.*

Доказательство. Пусть функции

$$\delta(z) = \{H; \delta(x_1), \delta(x_2), \ldots, \delta(x_i)\}$$

и

$$\delta'(z') = \{H'; \delta'(x_1'), \delta'(x_2'), \ldots, \delta'(x_i')\}$$

заданы на деревьях B и B' соответственно, причем

$$\delta(z) = \delta'(z').$$

Путь $\mu(A_0, z)$ дерева B будет изоморфен пути $\mu(A_0', z')$ дерева B'. В деревьях B и B' имеется по i путей, соединяющих точки z и z' с точками $x_1, x_2, \ldots, x_i$ и $x_1', x_2', \ldots, x_i'$ соответственно, причем путь $\mu(z, x_k)$ изоморфен пути $\mu(z', x_k')$, $(k = 1, 2, \ldots, i)$. Аналогичные рассуждения применимы для точек разветвления с порядками низшими, чем порядки точек z и z', вплоть до точек разветвления нулевого порядка.

Условимся здесь считать, что концевая точка дерева сама является ярлыком, если другим точкам ярлыки не отнесены. Заданную на дереве функцию подсчета в этом случае обозначим через $\delta_0(z)$.

Теорема 1. *Два дерева B и B' изоморфны тогда и только тогда, когда их функции подсчета $\delta_0(z)$ и $\delta_0'(z')$ равны.*

Доказательство. Так как реализациями функций $\delta_0(z)$ и $\delta_0'(z')$ являются, соответственно, деревья B и B', то изоморфизм этих деревьев следует из леммы.

Пусть теперь дерево B изоморфно дереву B'. Покажем, что $\delta_0(z) = \delta_0'(z')$. Значения функций подсчета в точках разветвления нулевого порядка, соответствующих при изоморфизме деревьев B и B', равны. Пусть функции равны для изоморфных деревьев, точками нулевой высоты которых являются точки разветвления порядка $k - 1$ и которые будут поддеревьями деревьев B и B'. Покажем их равенство для точек разветвления порядка k. Точка разветвления $x \in B$ порядка k соответствует при изоморфизме точке разветвления $x' \in B'$ того же порядка. Поддеревья деревьев B и B', точками нулевой высоты которых есть точки x и x', изоморфны, следовательно, они имеют равные количества точек разветвления порядка $\leqslant k-1$, которые расположены на равных расстояниях от точек x и x', соответственно. Значит, функции подсчета в точках x и x' зададутся одними и теми же множествами функций подсчета, заданных в точках разветвления порядка $\leqslant k-1$. Кроме того, высоты точек x и x' равны. Следовательно, $\delta_0(x) = \delta_0'(x')$.

3. Функцию подсчета $\delta(z)$ можно использовать для подсчета количеств деревьев с наперед заданными свойствами, если в символ «ярлык» вложить требуемый смысл.

Пусть $M(\eta) \neq 0$ — множество корневых деревьев, удовлетворяющих набору условий η. Точкам деревьев отнесем ярлыки согласно функции подсчета

$$\delta(z) = \{H; k_1\delta(x_1), k_2\delta(x_2), \ldots, k_i\delta(x_i)\},$$

заданной в точке разветвления z k-го порядка (k_i—количество реализаций функции $\delta(x_i)$).

Подсчитаем количество $L(k, \eta)$ неизоморфных деревьев, удовлетворяющих набору условий η, с заданной функцией подсчета $\delta(z)$. Построим реализацию функции $\delta(z)$, которая, согласно лемме, будет единственной. Пути $\mu(A_0, z), \mu(z, x_1), \ldots, \mu(z, x_i)$ являются стволами [3] деревьев, построенных на точках A_0, z и имеющих высоты $H, h_1, h_2, \ldots, h_i$ соответственно.

Пусть L_h — способность [3, 4] точки высоты h пути $\mu(A_0, z)$, $(h = 0, 1, \ldots, H - 1)$, зависящая от набора условий η, тогда

$$L(k, \eta) = L_H \varphi(L_h), \tag{1}$$

где $\varphi(L_h)$ — сумма всех возможных произведений по 1, 2, . . ., H множителей L_0, L_1, . . ., L_{H-1}. Число L_H находится на основании следующих соображений. Точку z будем рассматривать как

1) точку нулевой высоты для ветвей без точек разветвления;

2) корневую точку ветвей, содержащих точки разветвления.

В случае 1) количество L'_H деревьев подсчитывается согласно набору условий η (с учетом наличия ветвей с точками разветвления). В случае 2) ветвь B_n, являющаяся корневым деревом, удовлетворяет набору условий η_n, вообще говоря, отличному от набора условий η, и на ней задается функция подсчета $\delta(x_n)$, причем порядок точки разветвления $x_n \leqslant k-1$.

Пусть среди $k_1 + k_2 + \ldots + k_l = K$ ветвей имеется n_1 ветвей с заданными равными функциями подсчета и набором условий η_1, n_2 ветвей с набором условий η_2 и равными функциями подсчета, . . ., n_l ветвей — с набором условий η_l и равными функциями подсчета, причем

$$M(\eta_i) \cap M(\eta_j) = 0 \qquad \text{при } i \neq j.$$

Этому набору ветвей соответствует следующее количество деревьев:

$$f[L(h_1, \eta_1) n_1] f[L(h_2, \eta_2), n_2] \ldots f[L(h_l, \eta_l), n_l].$$

Значит, количество L''_H деревьев в случае 2) вычислится по формуле

$$L''_H = \sum_{n_i, \eta_i} f[L(h_1, \eta_1), n_1] \ldots f[L(h_l, \eta_l), n_l], \tag{2}$$

где $h_1, h_2, \ldots, h_l \leqslant k-1$; (суммирование ведется по всем числам n_i и наборам условий η_i, удовлетворяющим условиям: а) $n_1 + n_2 + \ldots + n_l = K$; б) набор условий η_i согласуется с набором условий η).

Так как очевидно, что

$$L_H = L'_H L''_H, \tag{3}$$

то, используя формулу (1), получим:

Теорема 2. *Количество $L(k, \eta)$ деревьев, удовлетворяющих набору условий η, с заданной функцией подсчета $\delta(z)$, подсчитывается по формуле*

$$L(k, \eta) = L'_H L''_H \varphi(L_h), \tag{4}$$

где k — порядок разветвления точки z; L'_H и L_h — подсчитываются согласно набору условий η; L''_H — подсчитывается по формуле (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Polya, Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, Acta Math., 68, 1937, 145.
2. Дж. Риордан, Введение в комбинаторный анализ, ИЛ, М., 1963.
3. Н. Г. Винниченко, К перечислению деревьев с отмеченным стволом, Тр. научн. конференции инж., асп., научн. сотруд. Ин-та матем. АН УССР, Изд-во АН УССР, К., 1964.
4. Н. Г. Винниченко, Подсчет количества деревьев по высоте и степени, УМЖ. т. XVI, № 5, 1964.