Построение квазиконформных отображений для некоторых задач газовой динамики

Г. С. Липовой

В работе [2] разработан метод построения квазиконформного отображения по заданному конформному отображению. При этом полученная область заранее не известна. При больших числах M она может сильно отличаться от заданной.

В данной работе рассматривается следующая задача. Предположим, что известно конформное отображение некоторой области, представляющей собой внешность профиля. Требуется построить квазиконформное отображение этой области на внутренность единичного круга при заданном числе M и циркуляции.

В общем случае функция, осуществляющая конформное отображение с точностью до постоянной, имеет вид

$$Z=\frac{k}{t}+k_1t+k_2t^2+\ldots+k_nt^n+\ldots. \tag{1}$$

Тогда на границе круга можно записать

$$Z=ke^{-i\theta}+k_1e^{i\theta}+k_2e^{i2\theta}+\ldots+k_ne^{in\theta}+\ldots, \tag{2}$$

где θ — полярный угол при конформном отображении.

При обтекании профилей потоком сжимаемой жидкости, пользуясь методом Л. И. Седова, легко установить, что отображающая функция имеет вид

$$\frac{z}{A}=\zeta-\lambda\overline{\int\left(\frac{dW}{dt}\right)^2\frac{dt}{\frac{d\zeta}{dt}}}=-\frac{1}{t}+\gamma_1t+\ldots+\frac{\gamma_n}{n}t^n+\ldots-\lambda\times$$
$$\times\left(-\frac{1}{\bar t}+\bar A_1\bar t+\ldots+\frac{\bar A_n}{n}\bar t^n+\ldots\right), \tag{3}$$

где A — масштабная постоянная, λ — параметр, зависящий от числа M, а коэффициенты $A_1,\ A_2,\ldots,A_n$ могут быть выражены через $\gamma_1,\ \gamma_2,\ldots,\gamma_n$ и параметр λ по схеме

$$\begin{gathered}A_0=ic-\gamma,\\ A_1=-2-0{,}25c^2-\gamma_1-A_0\gamma,\\ A_2=-ic-\gamma_2-A_0\gamma_1-A_1\gamma,\\ A_3=1-\gamma_3-A_0\gamma_2-A_1\gamma_1-A_2\gamma,\\ A_4=-\gamma_4-A_0\gamma_3-A_1\gamma_2-A_2\gamma_1-A_3\gamma,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ A_n=-\gamma_n-A_0\gamma_{n-1}-\ldots-A_{n-2}\gamma_1-A_{n-1}\gamma,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{gathered} \tag{4}$$

где $\gamma=ic\frac{\lambda}{1+\lambda}$, $c=4\sin\sigma_0$, σ_0 — угол, определяющий циркуляцию.

Обозначим через φ полярный угол при квазиконформном отображении. При этом уравнение

$$\frac{z}{A}=-e^{-i\varphi}+\gamma_1e^{i\varphi}+\ldots+\frac{\gamma_n}{n}e^{in\varphi}+\ldots-\lambda\times$$
$$\times\left(-e^{i\varphi}+\bar A_1e^{-i\varphi}+\ldots+\frac{\bar A_n}{n}e^{-in\varphi}+\ldots\right) \tag{5}$$

при соответствующем выборе коэффициентов $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ и $A, A_1, A_2, \ldots, A_n$ выражает тот же профиль, хотя одним и тем же точкам профиля при квазиконформном отображении отвечают другие точки круга, чем при конформном.

Для отыскания зависимости (5) применим метод разложения в ряд по степеням параметра λ. Будем искать зависимость между полярным углом в плоскости Z и полярным углом в плоскости z в виде ряда по степеням λ:

$$\varphi = \theta + \lambda\theta_1 + \lambda^2\theta_2 + \lambda^3\theta_3 + \ldots, \tag{6}$$

где $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ — вещественные периодические функции с периодом 2π.

Подставим значение θ из уравнения (6) в уравнение (5) и разложим выражения $e^{in\varphi}$, $e^{-in\varphi}$ в ряд по степеням λ:

$$e^{in\varphi} = e^{in\theta}\left[1 + \lambda in\theta_1 + \frac{\lambda^2}{2}(in2\theta_2 - n^2\theta_1^2) + \frac{\lambda^3}{6}(in6\theta_3 - 6n^2\theta_1\theta_2 - in^3\theta_1^3) + \ldots\right],$$

$$e^{-in\varphi} = e^{-n\theta}\left[1 + \lambda in\theta_1 - \frac{\lambda^2}{2}(in2\theta_2 + n^2\theta_1^2) - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda^3}{6}(in6\theta_3 + 6n^2\theta_1\theta_2 - in^3\theta_1^3) + \ldots\right]. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (5) и собирая члены с одинаковыми степенями λ, получим

$$\frac{z}{A} = \left(-e^{-i\theta} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n}{n}e^{in\theta}\right) + \lambda\left\{\left(ie^{-i\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} i\gamma_n e^{in\theta}\right)\theta_1 + \right.$$

$$\left. + \left(e^{i\theta} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{A}_n}{n}e^{-in\theta}\right)\right\} + \lambda^2\left\{\theta_2\left(ie^{-i\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} in\gamma_n e^{ni\theta}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\theta_1^2}{2}\left(e^{-i\theta} - \sum_{n=1}^{\infty} n\gamma_n e^{in\theta}\right) - i\theta_1\left(e^{i\theta} - \sum_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n e^{-in\theta}\right)\right\} + \ldots \tag{8}$$

Таким образом, функция z представляется в виде ряда по степеням λ. В выражения для коэффициентов этого ряда входят неизвестные функции $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$. Так как они вещественны, то их можно представить в виде

$$\theta_1 = \sigma_1 + \overline{\sigma}_1,\ \theta_2 = \sigma_2 + \overline{\sigma}_2,\ \theta_3 = \sigma_3 + \overline{\sigma}_3, \ldots, \tag{9}$$

где

$$\sigma_1 = \alpha_1 e^{-i\theta} + \alpha_2 e^{-i2\theta} + \ldots + \alpha_n e^{-in\theta} + \ldots,$$

$$\sigma_2 = \mu_1 e^{-i\theta} + \mu_2 e^{-i2\theta} + \ldots + \mu_n e^{-in\theta} + \ldots, \tag{10}$$

$$\sigma_3 = \nu_1 e^{-i\theta} + \nu_2 e^{-i2\theta} + \ldots + \nu_n e^{-in\theta} + \ldots.$$

Будем определять эти функции последовательно, начиная от коэффициента при нулевой степени λ. Наряду с коэффициентами $\alpha_n, \mu_n, \nu_n, \ldots$ при этом будут определяться и коэффициенты γ_n, а также постоянная A следующим образом. Если ограничиться только членами, не содержащими λ, то получим первое приближение для γ_n и A: $\gamma_n^{(1)} = -\dfrac{nk_n}{A}$, $A^{(1)} = -k$.

Далее ищем решение с точностью до членов, содержащих λ в первой степени. Для этого подставим значение θ_1 из (9) и (10) в выражение $\theta_1\left(ie^{-i\theta}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} i\gamma_n e^{i\theta}\right)$ и произведем умножение. Собирая члены с одинаковыми степенями e, получим

$$\theta_1\left(ie^{-i\theta}+\sum_{n=1}^{\infty} i\gamma_n e^{in\theta}\right)=\ldots+P_{-n}e^{-in\theta}+\ldots+P_{-1}e^{-i\theta}+$$
$$+P_0+P_1e^{i\theta}+\ldots+P_ne^{in\theta}+\ldots, \tag{11}$$

где

$$P_{-n}=i\left(\alpha_{n-1}+\sum_{\beta=1}^{\infty}\alpha_{n+\beta}\gamma_\beta\right),\ldots,P_{-1}=i\sum_{\beta=1}^{\infty}\alpha_{1+\beta}\gamma_\beta,$$

$$P_0=i\left(\overline{\alpha}_1+\sum_{\beta=1}^{\infty}\alpha_\beta\gamma_\beta\right),$$

$$P_1=i\left(\overline{\alpha}_2+\sum_{\beta=1}^{\infty}\alpha_\beta\gamma_{\beta+1}\right),\ldots,P_n=i\left(\overline{\alpha}_{n+1}+\sum_{\beta=1}^{n-1}\overline{\alpha}_{n-\beta}\gamma_\beta+\sum_{\beta=1}^{\infty}\alpha_\beta\gamma_{n+\beta}\right),\ldots.$$

Подставив (11) в (8) и собрав члены с одинаковыми степенями e, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях e в (8) и (2). Получим две системы уравнений. Из первой системы

$$\begin{gathered}
i\alpha_n-\frac{\overline{A}_{n+1}}{n+1}=0,\\
i\alpha_{n-1}-\frac{\overline{A}_n}{n}=0,\\
i\alpha_{n-2}+i\alpha_n\gamma_1-\frac{\overline{A}_{n-1}}{n-1}=0,\\
i\alpha_{n-3}+i\alpha_{n-1}\gamma_1+i\alpha_n\gamma_2-\frac{\overline{A}_{n-2}}{n-2}=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
i\alpha_1+i\alpha_3\gamma_1+\ldots+i\alpha_n\gamma_{n-2}-\frac{\overline{A}_2}{2}=0
\end{gathered} \tag{12}$$

определяем α_n, принимая при этом $\gamma_n=\gamma_n^{(1)}$.
Из второй системы

$$\begin{gathered}
\lambda(i\alpha_2\gamma_1+\ldots+i\alpha_n\gamma_{n-1}-\overline{A}_1)-1=\frac{k}{A},\\
\lambda(i\overline{\alpha}_2+i\alpha_1\gamma_2+\ldots+i\alpha_{n-1}\gamma_n+1)+\gamma_1=\frac{k_1}{A},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\lambda(i\overline{\alpha}_n+i\overline{\alpha}_{n-2}+\ldots+i\overline{\alpha}_1\gamma_{n-2})+\gamma_{n-1}=\frac{k_{n-1}}{A},\\
\lambda(i\overline{\alpha}_{n-1}\gamma_1+\ldots+i\overline{\alpha}_1\gamma_{n-1})+\gamma_n=\frac{k_n}{A},
\end{gathered} \tag{13}$$

определяем $\gamma_n^{(2)}$ и $A^{(2)}$.

Затем будем искать решение с точностью до членов, содержащих λ^2. Для этого представим выражения, содержащиеся при λ^2, в виде

$$\theta_2\left(ie^{-i\theta}+\sum_{n=1}^{\infty} in\gamma_n e^{in\theta}\right)=\ldots+G_{-n}e^{-in\theta}+\ldots+$$
$$+G_{-1}e^{-i\theta}+G_0+G_1e^{i\theta}+\ldots+G_ne^{in\theta}+\ldots,$$
$$\frac{1}{2}\theta_1^2\left(e^{-i\theta}-\sum_{n=1}^{\infty} n\gamma_n e^{in\theta}\right)=\ldots+N_{-n}e^{-in\theta}+\ldots+$$
$$+N_{-1}e^{-i\theta}+N_0+N_1e^{i\theta}+\ldots+N_ne^{in\theta}+\ldots, \tag{14}$$
$$-i\theta_1\left(e^{i\theta}-\sum_{n=1}^{\infty}\bar{A}_ne^{-in\theta}\right)=\ldots+Q_{-n}e^{-in\theta}+\ldots+$$
$$+Q_{-1}e^{-i\theta}+Q_0+Q_1e^{i\theta}+\ldots+Q_ne^{in\theta}+\ldots.$$

Подставив (14) в (8) и собрав члены с одинаковыми степенями e, снова приравняем коэффициенты при одинаковых степенях e в (8) и (2). Получим две системы для определения μ_n и γ_n. Первая

$$\begin{gathered}
i\mu_{n-1}+N_{-n}+Q_{-n}=0,\\
i\mu_{n-2}+N_{-(n-1)}+Q_{-(n-1)}=0,\\
i\mu_{n-3}+i\mu_{n-1}\gamma_1+N_{-(n-2)}+Q_{-(n-2)}=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
i\mu_2+\mu_4\gamma_1+\ldots+i\mu_n\gamma_{n-3}+N_{-3}+Q_3=0,\\
i\mu_1+i\mu_3\gamma_1+\ldots+i\mu_n\gamma_{n-2}+N_{-2}+Q_{-2}=0,
\end{gathered} \tag{15}$$

из которой находим μ_n, принимая $\gamma_n=\gamma_n^{(2)}$. Вторая

$$\begin{gathered}
\lambda^2(i\mu_2\gamma_1+\ldots+i\mu_n\gamma_{n-1}+N_{-1}+Q_{-1})+\lambda(P_{-1}-\bar{A}_1)-1=\frac{k}{A},\\
\lambda^2(i\bar{\mu}_2+i\mu_1\gamma_2+\ldots+i\mu_{n-1}\gamma_n+N_1+Q_1)+\lambda(P_1+1)+\gamma_1=\frac{k_1}{A},\\
\lambda^2(i\mu_3+i\bar{\mu}_1\gamma_1+i\mu_1\gamma_3+\ldots+i\mu_{n-2}\gamma_n+N_2+Q_2)+\lambda P_2+\gamma_2=\frac{k_2}{A},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\lambda^2(i\bar{\mu}_{n-1}\gamma_1+\ldots+i\bar{\mu}_1\gamma_{n-1}+N_n+Q_n)+\lambda P_n+\gamma_n=\frac{k_n}{A},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered} \tag{16}$$

из которой определяем $\gamma_n^{(3)}$ и $A^{(3)}$.

Точно также можно последовательно определить и все остальные функции θ_n. Отметим, что для повышения точности на каждом шаге расчет можно повторять, принимая при решении первой системы γ_n, найденные только что из решения второй системы.

Если γ_n и A найдены, то отображающая функция определяется подстановкой этих значений в уравнение (3).

Разность между углами θ и φ определяется функцией смещения $\Delta\varphi$:

$$\Delta\varphi = \varphi - \theta = \frac{180^\circ}{\pi}(\lambda\theta_1 + \lambda^2\theta_2 + \lambda^3\theta_3 + \ldots), \tag{17}$$

которая также будет определена, если найдены α_n, μ_n, ν_n, ...

Отметим, что для газодинамического расчета достаточно знать только $\Delta\varphi$ и функцию ζ, равную

$$\zeta = -\frac{1}{t} + \gamma_1 t + \ldots + \frac{\gamma_n}{n} t^n + \ldots. \tag{18}$$

Тогда скорость в плоскости z находится по известным формулам (см. [2], стр. 388 и 409)

Пример 1. Рассмотрим обтекание потоком сжимаемой жидкости кругового цилиндра при наличии циркуляции. Эта задача сводится к квазиконформному отображению круга самого на себя. Расчет можно производить при потребности для целого диапазона значений λ и c. Тогда коэффициенты γ_n находятся в виде функций от λ и c. Ниже приводятся значения для коэффициентов γ_n, рассчитанные для значений $\lambda = 0{,}25$ и $c = 1$ (что соответствует $M = 0{,}8$ и $\sigma_0 = 14^\circ 30'$). Расчет был произведен с точностью до членов, содержащих λ^2.

Для функции $\Delta\varphi$ получено значение

$$\Delta\varphi = \frac{180^\circ}{\pi}(0{,}160\cos\theta - 0{,}157\sin 2\theta + 0{,}028\cos 3\theta - 0{,}008\cos 5\theta),$$

откуда видно, что разность между углами φ и θ может достигать 10°.

Для отображающей функции получено значение

$$z = 1{,}782\,(-0{,}005\bar{t}^5 - i0{,}010\bar{t}^4 - 0{,}034\bar{t}^3 - i0{,}049\bar{t}^2 + 0{,}459\bar{t} + \frac{0{,}25}{\bar{t}} +$$

$$+ i0{,}023 - \frac{1}{t} - 0{,}256t - i0{,}019t^2 + 0{,}005t^3 - 0{,}002t^4),$$

откуда можно судить о степени точности полученного отображения. Функция z отображает окружность $-e^{-i\theta}$ на некоторую область, близкую к окружности. Различие между полученной областью и исходной не превышает 2% диаметра. Для функции ζ получаем выражение

$$\zeta = -\frac{1}{t} - 0{,}256t - i0{,}019t^2 + 0{,}005t^3 - i0{,}002t^4.$$

Практически скорость потока сжимаемой жидкости вокруг цилиндра можно найти, вычислив скорость потока несжимаемой жидкости вокруг эллипса $\zeta = -\frac{1}{t} - 0{,}256t$, а затем пересчитать по известной формуле (см. [2], стр. 388), учитывая смещение, устанавливаемое функцией $\Delta\varphi$.

Пример 2. Рассмотрим руль Жуковского, уравнение которого дается формулой

$$Z = -\left(\frac{1}{t} + 0{,}384t + 0{,}146t^2 + 0{,}055t^3\right).$$

Для функции $\Delta\varphi$ получаем значение (при $\lambda = 0{,}25$ и $c = 1$):

$$\varphi\Delta = \frac{180^\circ}{\pi}(0{,}093\cos\theta - 0{,}099\sin\theta - 0{,}012\cos 2\theta - 0{,}101\sin 2\theta +$$

$$+ 0{,}020\sin 3\theta - 0{,}016\cos 4\theta + 0{,}049\sin 4\theta + 0{,}020\cos 5\theta -$$

$$-0{,}006\sin 5\theta - 0{,}006\cos 6\theta - 0{,}013\sin 6\theta).$$

Разность между углами φ и θ достигает 8°.

Для отображающей функции получаем значение

$$z = 1{,}634\,[(0{,}003 - i0{,}006)\,\bar{t}^6 - (0{,}020 + i0{,}002)\,\bar{t}^5 + (0{,}005 - i0{,}009)\,\bar{t}^4 -$$

$$- (0{,}032 + i0{,}003)\,\bar{t}^3 - (0{,}014 + i0{,}043)\,\bar{t}^2 + (0{,}416 - i0{,}004)\,\bar{t} + \frac{0{,}25}{\bar{t}} +$$

$$+ (0{,}050 + i0{,}039) - \frac{1}{t} - (0{,}424 - i0{,}018)\,t - (0{,}054 - i0{,}006)\,t^2 -$$

$$- (0{,}036 - i0{,}007)\,t^3 - 0{,}010t^4 - 0{,}002t^5],$$

а для функции ζ —

$$\zeta = -\frac{1}{t} - (0{,}424 - i0{,}018)\,t - (0{,}054 - i0{,}006)\,t^2 - (0{,}036 - i0{,}007)\,t^3 -$$

$$- 0{,}010t^4 - 0{,}002t^5.$$

Видим, что функция ζ заметно отличается от функции Z, участвующей в расчете потока по методу Л. И. Седова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Методы приближенного решения уравнений в частных производных, ОНТИ, М. — Л., 1936.
2. Л. И. Седов, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Гостехиздат, М.— Л., 1954.

Поступила 29.V 1964

Киев