Теоремы тауберова типа для суммирования двойных рядов методами Гёльдера

К. М. Слепенчук

Пусть $\alpha = 1, 2, \ldots$. Преобразуем двойной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} \tag{1}$$

следующим образом:

$$H_{mn}^{(\alpha)} = \frac{1}{m.n} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} H_{k-1\, l-1}^{(\alpha-1)},\ H_{mn}^{(0)} = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} a_{kl}. \tag{2}$$

Ряд (1) $(H^{(\alpha)})$-суммируем к S, если $H_{mn}^{(\alpha)} \to S, m,n \to \infty$, и $|(H^{(\alpha)})|$-суммируем, если последовательность $\{H_{mn}^{(\alpha)}\}$ абсолютно сходится, т. е.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} | H_{m+1n+1}^{(\alpha)} - H_{mn+1}^{(\alpha)} - H_{n1+1n}^{(\alpha)} + H_{mn}^{(\alpha)} | < \infty.$$

Преобразование (2) представляет собой средние Гёльдера порядка α на случай суммирования двойных рядов.

В этой заметке обобщаются на двойные ряды некоторые теоремы тауберова типа (см. [1] и [2]).

Теорема 1. *Если ограниченная последовательность $\{H_{mn}^{(\alpha-1)}\}$ имеет своим пределом S, то последовательность $\{H_{mn}^{(\alpha)}\}$ также имеет предел, равный S.*

Это следует из тождества

$$H_{mn}^{(\alpha)} - S = \frac{1}{m \cdot n} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} (H_{k-1\, l-1}^{(\alpha-1)} - S) = \frac{1}{mn} \left[\sum_{k=1}^{m_0} \sum_{l=1}^{n_0} (H_{k-1\, l-1}^{(\alpha-1)} - S) + \right.$$

$$+ \sum_{k=m_0+1}^{m} \sum_{l=1}^{n_0} (H_{k-1\, l-1}^{(\alpha-1)} - S) + \sum_{k=1}^{m_0} \sum_{l=n_0+1}^{n} (H_{k-1\, l-1}^{(\alpha-1)} - S) +$$

$$\left. + \sum_{k=m_0+1}^{m} \sum_{l=n_0+1}^{n} (H_{k-1\, l-1}^{(\alpha-1)} - S) \right],$$

где m_0, n_0 такие, что $| H_{mn}^{(\alpha-1)} - S | < E, m \geqslant m_0, n \geqslant n_0$.

Из этой теоремы следует теорема регулярности для $(H^{(\alpha)})$-методов, если последовательно положить $\alpha = 1, 2, \ldots$.

Теорема 2. *Если ряд (1) с ограниченными частными суммами $(H^{(\alpha)})$-суммируем к S, тогда условие*

$$t_{mn}^{(0)} = \frac{1}{mn} \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} (k \cdot n + l \cdot m - kl)\, a_{kl} \to 0 \tag{3}$$

$$m, n \to \infty$$

является необходимым и достаточным для сходимости ряда (1) к S.

Достаточность. Пусть

$$a_{mn}^{(\alpha)} = H_{mn}^{(\alpha)} - H_{mn-1}^{(\alpha)} - H_{m-1n}^{(\alpha)} + H_{m-1\, n-1}^{(\alpha)},\ a_{mn}^{(0)} = a_{mn}.$$

Тогда

$$H_{mn}^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} a_{kl}^{(\alpha)}$$

и

$$H_{mn}^{(\alpha-1)} - H_{mn}^{(\alpha)} = \frac{1}{m \cdot n} \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} (k \cdot n + l \cdot m - kl)\, a_{kl}^{(\alpha-1)} = t_{mn}^{(\alpha-1)}. \tag{4}$$

Пусть $t_{mn}^{(0)} \to 0$. Тогда из тождества

$$\frac{1}{m \cdot n} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} t_{k-1\, l-1}^{(\alpha-2)} = \frac{1}{mn} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} [H_{k-1\, l-1}^{(\alpha-2)} - H_{k-1\, l-1}^{(\alpha-1)}] = H_{mn}^{(\alpha-1)} - H_{mn}^{(\alpha)} = t_{mn}^{(\alpha-1)} \tag{5}$$

следует, что $t_{mn}^{(1)} \to 0, \dots, t_{mn}^{(\alpha-1)} \to 0$. Пусть $H_{mn}^{(\alpha)} \to S$. Тогда из (4): $H_{mn}^{(\alpha-1)} \to S$. Продолжая этот процесс для $\alpha - 2, \dots, 0$, мы убеждаемся в сходимости ряда (1) к S.

Необходимость. Пусть ряд (1) сходится к S, а следовательно, в силу регулярности $H_{mn}^{(1)} \to S$. Тогда из тождества (4), если положить $\alpha = 1$, необходимо следует (3).

Теорема. 3. *Если* $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} |a_{kl}| < \infty$, *то необходимо*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |t_{m+1\, n+1}^{(0)} - t_{mn+1}^{(0)} - t_{m+1n}^{(0)} - t_{mn}^{(0)}| < \infty. \tag{6}$$

Утверждение теоремы следует из неравенства

$$\sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} |t_{m+1\, n+1}^{(0)} - t_{mn+1}^{(0)} - t_{m+1n}^{(0)} + t_{mn}^{(0)}| \leqslant \sum_{m=1}^{M+1} \sum_{n=1}^{N+1} |a_{mn}| +$$

$$+ \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{(m+1)(n+1)} - \frac{1}{m(n+1)} - \frac{1}{(m+1)n} + \frac{1}{mn} \right) \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} kl\, |a_{kl}| <$$

$$< A \sum_{m=1}^{M+1} \sum_{n=1}^{N+1} |a_{mn}|. \tag{7}$$

Теорема 4. *Если последовательность* $\{H_{mn}^{(0)}\}$ *абсолютно сходится, то абсолютно сходится и преобразованная последовательность* $H\{_{mn}^{(1)}\}$.

Это следует из теоремы 3 и тождества (4), если положить $\alpha = 1$.

Теорема 5. *Если ряд* (1) *с ограниченными частными суммами* $(H^{(\alpha)})|$*-суммируем к* S, *то условие* (6) *является необходимым и достаточным для абсолютной сходимости ряда* (1) *к* S.

Необходимость условия (6) была доказана в теореме 3.

Пусть теперь выполнено (6). Тогда из тождества (5), на основании теоремы 4, следует абсолютная сходимость последовательностей $\{t_{mn}^{(1)}\}, \dots, \{t_{mn}^{(\alpha-1)}\}$. Если ряд (1) $|(H^{(\alpha)})|$-суммируем к S, то из тождества (4) следует $|(H^{(\alpha-1)})|$-суммируемость ряда (1) к S. Теорема будет доказана, если продолжить этот процесс для $\alpha - 2, \dots, 0$.

Теперь перейдем к теоремам тауберова типа для случая суммирования двойных рядов $(H^{(\alpha)})$-методами отрицательного порядка. Для этого в тождестве

$$H_{mn}^{(\alpha-1)} = (m+1)(n+1)H_{m+1\,n+1}^{(\alpha)} - (m+1)nH_{m+1n}^{(\alpha)} - \\ - m(n+1)H_{mn+1}^{(\alpha)} + mnH_{mn}^{(\alpha)}$$

положим $\alpha = 0, -1, -2, \ldots$. Тогда получим

$$H_{mn}^{(-\nu)} = (m+1)(n+1)H_{m+1\,n+1}^{(-\nu+1)} - (m+1)nH_{m+1n}^{(-\nu+1)} - \\ - m(n+1)H_{mn+1}^{(-\nu+1)} + mnH_{mn}^{(-\nu+1)}, \ \nu = 1, 2, \ldots . \tag{8}$$

Ряд (1) $(H^{(-\nu)})$-суммируем к S, если $H_{mn}^{(-\nu)} \to S, m, n \to \infty$. Используя (2) и (8), получим следующую теорему регулярности для $(H^{(\alpha)})$-методов отрицательного порядка.

Теорема 6. *Если* $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} = S(H^{(-\nu)})$, *тогда* $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} = S(H^{(-\nu+1)})$, *а следовательно,* $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} = S$.

Легко видеть, что

$$h_{mn}^{(-\nu)} = H_{mn}^{(-\nu)} - H_{m-1n}^{(-\nu)} - H_{mn-1}^{(-\nu)} + H_{m-1n-1}^{(-\nu)} = (m+1)(n+1)h_{m+1\,n+1}^{(-\nu+1)} - \\ - (m-1)(n+1)h_{mn+1}^{(-\nu+1)} - (m+1)(n-1)h_{m+1n}^{(-\nu+1)} + \\ + (m-1)(n-1)h_{mn}^{(-\nu+1)}, \qquad h_{mn}^{(0)} = a_{mn}$$

и

$$H_{mn}^{(-\nu)} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} h_{kl}^{(-\nu)}.$$

Поэтому

$$H_{mn}^{(-\nu)} - H_{mn}^{(-\nu+1)} = \frac{1}{m\cdot n}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}(k\cdot n + l\cdot m - kl)h_{kl}^{(-\nu)} = \bar{t}_{mn}^{(-\nu)}. \tag{9}$$

Теорема 7. *Если ряд* (1) *с ограниченными частными суммами сходится к* S, *то условие*

$$\bar{t}_{mn}^{(-\nu)} \to 0, \qquad m, n \to \infty \tag{10}$$

является необходимым и достаточным для его $(H^{(-\nu)})$-*суммируемости к* S.

Достаточность. Пусть выполнено (10). Тогда из тождества

$$\frac{1}{mn}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\bar{t}_{k-1\,l-1}^{(-\nu)} = \frac{1}{mn}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}[H_{k-1\,l-1}^{(-\nu)} - H_{k-1\,l-1}^{(-\nu+1)}] = \\ = H_{mn}^{(-\nu+1)} - H_{mn}^{(-\nu+2)} = \bar{t}_{mn}^{(-\nu+1)} \tag{11}$$

следует, что $\bar{t}_{mn}^{(-\nu+1)} \to 0, \ldots, \bar{t}_{mn}^{(-1)} \to 0$. Пусть ряд сходится к S. Тогда из (9) при $\nu = 1$ получим: $H_{mn}^{(-1)} \to S$. Достаточность условия (10) будет доказана, если продолжить этот процесс до $-\nu$.

Необходимость. Пусть $H_{mn}^{(-\nu)} \to S$. Тогда в силу регулярности $H_{mn}^{(-\nu+1)} \to S$. Следовательно, из тождества (9) необходимо следует (10).

Теорема 8. *Если ряд* (1) *с ограниченными частными суммами абсолютно сходится к* S, *то условие*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|\bar{t}^{(-\nu)}_{m+1\,n+1}-\bar{t}^{(-\nu)}_{m+1n}-\bar{t}^{(-\nu)}_{mn+1}+\bar{t}^{(-\nu)}_{mn}|<\infty \tag{12}$$

является необходимым и достаточным для его $|(H^{(-\nu)})|$-*суммируемост к* S.

Необходимость. Пусть ряд (1) $|(H^{(-\nu)})|$-суммируем. Тогда необходимость (11) следует из неравенства

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}|\bar{t}^{(-\nu)}_{m+1\,n+1}-\bar{t}^{(-\nu)}_{m+1n}-\bar{t}^{(-\nu)}_{mn+1}+\bar{t}^{(-\nu)}_{mn}|<A\sum_{m=1}^{M+1}\sum_{n=1}^{N+1}|h^{(-n)}_{mn}|,$$

которое доказывается так же, как и неравенство (7).

Достаточность. Пусть имеет место (12). Тогда из тождества (11), на основании теоремы 4, следует абсолютная сходимость последовательностей $\{\bar{t}^{(-\nu+1)}_{mn}\},\ldots,\{\bar{t}^{(-1)}_{mn}\}$. Если ряд абсолютно сходится, то при $\nu=1$ из (9) следует $|(H^{(-1)})|$-суммируемость ряда (1) к S. Теорема будет доказана, если этот процесс продолжить до $-\nu$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Харди, Расходящиеся ряды, ИЛ, 1951.
2. К. М. Сліпенчук, Узагальнені методи Гельдера від'ємного порядку, Доп. АН УРСР, № 6, 1962.

Поступила 14.III 1963 г.
Днепропетровск