О единственности решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных

Н. Н. Чаус

В данной заметке результаты, полученные в [1], обобщаются на системы уравнений и случай многих пространственных переменных.

1°. Будем рассматривать систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial u_j(x,\ t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{m} P_{jk}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u_k(x,\ t)\ \ (j = 1, \ldots,\ m). \tag{1}$$

Здесь $u_j(x,\ t)$ $(x = (x_1, \ldots,\ x_n),\ \ -\infty < x_i < \infty;\ t \in [0,\ T])$ — неизвестные функции, выражения $P_{jk}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ представляют собой многочлены с постоянными коэффициентами от производных $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$. Задача Коши состоит в определении вектор-функции $u(x,\ t) = (u_1(x,\ t), \ldots,\ u_m(x,\ t))$, удовлетворяющей при $t \geqslant 0$ системе (1) и при $t = 0$ — начальным условиям $u(x,\ 0) = u_0(x)$, где $u_0(x)$ — заданная вектор-функция.

Ставится вопрос о построении класса единственности решения задачи Коши для системы (1), т. е. об указании такой совокупности функций $\{u(x)\}$, что решение $(u_1(x,\ t), \ldots,\ u_m(x,\ t))$ единственно, если оно существует и $u_j(x,\ t) \in \{u(x)\}$ $(j = 1, \ldots,\ m)$, $t \in [0,\ T]$.

Будет доказана следующая теорема.

Теорема. *Если для системы* (1) *приведенный порядок* $p > 1$, $l(r)$ $(r > 0)$ — *непрерывная, неубывающая, положительная функция, для которой*

$$\int_1^{\infty} \frac{dr}{rl(r)^{p-1}} = \infty, \tag{2}$$

то совокупность всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, *удовлетворяющих неравенству*

$$|f(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant Ce^{|x_1|^{p'} l(|x_1|) + \ldots + |x_n|^{p'} l(|x_n|)} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right), \tag{3}$$

где $C = C_f > 0$ — *некоторая константа, образует класс единственности решения задачи Коши для системы* (1).

Доказательство теоремы будет проводиться аналогично тому, как это делалось для одного уравнения в [1]. Для упрощения изложения ограничимся случаем, когда x изменяется не в n-мерном пространстве, а на прямой: $-\infty < x < \infty$; для случая $x \in E_n$ необходимые замечания сделаны в 4°.

2°. В этом пункте рассматривается два вспомогательных вопроса.

А. Положим $M(x) = \Omega(x) = x^{p'} l_1(x)$ $(x > 0)$, $l_1(x) = 2l(x)$, $b_0 > 0$, p — приведенный порядок системы (1), и рассмотрим пространство $W_{M,1}^{\Omega, b_0}$. Как известно [2], это пространство состоит из целых аналитических функций $\varphi(z)$, для которых при любом $z = x + iy$

$$|\varphi(x + iy)| \leqslant C_{\varphi,\varepsilon,\delta} e^{-|ax|^{p'} l_1(|ax|) + |by|^{p'} l|by|)}$$

при произвольном выборе $a = 1 - \varepsilon$, $b = b_0 + \delta$, $\varepsilon, \delta > 0$. В [1] доказывается, что при достаточно большом b_0 данное пространство будет достаточно богато функциями и что для последовательных производных от $\varphi(z) \in W_{M,1}^{\Omega, b_0}$ выполняются следующие неравенства

$$|\varphi^{(q)}(x)| \leqslant C_{\varphi,\varepsilon,\delta} A^q q^{\frac{q}{p}} l_1(q)^{\frac{q}{p'}} e^{-|ax|^{p'} l_1(|ax|)} = C_{\varphi,\varepsilon,\delta} \cdot \nu_q \cdot e^{-|ax|^{p'} l_1(|ax|)} \tag{4}$$

с некоторой константой A, $\nu_0 = 1$.

Б. Обозначим $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ матрицу системы (1). Выясним, как ведут себя элементы матриц $P^N\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ в зависимости от N. Для этого воспользуемся формулой (см., например, [3]) для вычисления функций от матриц. Пусть нужно вычислить $f(\lambda)$ от матрицы A порядка m. Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ $(r \leqslant m)$ спектр матрицы A, через $(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \ldots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}$ $(m_1 + \ldots + m_r \leqslant m)$ — ее минимальный аннулирующий многочлен. Тогда

$$f(A) = \sum_{k=1}^{r} \{f(\lambda_k) Z_{k1} + f'(\lambda_k) Z_{k2} + \ldots + f^{(m_k - 1)}(\lambda_k) Z_{km_k}\}.$$

В этой формуле матрицы $Z_{\alpha\beta}$ (так называемые компоненты матрицы A) не зависят от вычисляемой функции $f(\lambda)$ и представляют собой полиномы степени не выше m от матрицы A.

Теперь введем в рассмотрение матрицу $P(s)$, которая получается из $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ заменой $\frac{\partial}{\partial x}$ на s. Для функций $f_N(\lambda) = \lambda^N$ согласно приведенной формуле получим

$$P^N(s) = \sum_{k=1}^{r} \{\lambda_k^N(s) Z_{k1}(s) + N\lambda_k^{N-1}(s) Z_{k2}(s) + \ldots + N(N-1)\ldots$$
$$\ldots (N - m_k + 2) \lambda_k^{N-m_k+1}(s) Z_{km_k}(s)\}.$$

Обозначим $M(s)=\max_j|\lambda_j(s)|$, $[A]_{ij}$ — ij-й элемент матрицы A, h — максимальная из степеней полиномов $[Z_{\alpha\beta}]_{ij}$ (ясно, что $h\leqslant mq$, где q — обычный порядок системы (1)). Тогда легко получается для достаточно больших $|s|$ следующая оценка:

$$|[P^N(s)]_{ij}|\leqslant mM^N(s)\,N(N-1)\dots(N-m+2)\max_{\alpha,\beta,i,j}|[Z_{\alpha\beta}]_{ij}\leqslant M^N(s)\,N_1^m\cdot s^h$$

$$(N_1\text{ — const}).$$

Как известно [2], приведенный порядок p системы (1) совпадает со степенным порядком роста функции $M(s)$. Поэтому окончательно

$$|[P^N(s)]_{ij}|\leqslant C_1^N s^{Np+h}\ \ (C_1\text{ — const}).$$

Из этой оценки получается следующий вывод: элементы матрицы $P^N\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ представляют собой многочлены от $\frac{\partial}{\partial x}$ степени не выше $[Np+h]$, где p — приведенный порядок системы (1), а h — некоторая константа. Кроме того, легко видеть, что сумма модулей коэффициентов каждого многочлена $[P^N(s)]_{ij}$ не больше C_0^N, где C_0 — некоторая константа.

3°. Доказательство теоремы.

Пусть $u_i(x,\ t)$ — i-я компонента решения системы (1) с начальным условием $u(x,\ 0)=0$, и для $u_i(x,\ t)$ при любом $t\in[0,T]$ выполняется (3). Нужно показать, что $u_i(x,\ t)\equiv 0$, $t\in[0,T]$ $(i=1,\dots,m)$. Для этого будем рассматривать $u_i(x,\ t)$ как обобщенную функцию над основным пространством $\Phi=W_{\mathrm{M},1}^{\Omega,b_0}$, которое введено в 2°, А. Благодаря условию (3) и выбору функций $\mathrm{M}(x)$ и $\Omega(x)$ при построении $W_{\mathrm{M},1}^{\Omega,b_0}$, $u_i(x,\ t)$ действительно есть линейный непрерывный функционал над $\Phi=W_{\mathrm{M},1}^{\Omega,b_0}$. Дальше можно показать, что $\{u_i(x,\ t)\}$, будучи обычным решением системы (1), будет и решением в обобщенном смысле, т. е. для любой $\varphi(x)\in\Phi$ $(t\in[0,T])$ справедливо:

$$\text{а)}\ \frac{\partial}{\partial t}(u_i(x,\ t),\ \varphi(x))=\sum_{k=1}^{m}\left(u_k(x,\ t),\ \overline{P}_{ik}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)\right),$$

$$\text{б)}\ \lim_{t\to 0}(u_i(x,\ t),\ \varphi(x))=0,$$

где $\overline{P}_{ik}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — формально сопряженное выражение к $P_{ik}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $(u(x,\ t),\ \varphi(x))=\int u(x,\ t)\ \ \varphi(x)\,dx$. Доказательство этого факта ничем не отличается от доказательства, которое имеется в [2] для случая $\Phi=S_{\alpha,A}^{\beta,B}$.

Определим при каждом фиксированном $\varphi\in\Phi$ функцию $F_i(\varphi,\ t)=(u_i(x,\ t),\ \varphi(x))$, $t\in[0,T]$. Для нее имеем:

$$\frac{d}{dt}F_i(\varphi,\ t)=\left(u_1(x,\ t),\ \overline{P}_{i1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)\right)+\dots+\left(u_m(x,\ t),\right.$$

$$\left.\overline{P}_{im}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)\right)=\left(u_1(x,\ t),\ \left[\overline{P}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]_{i1}\varphi(x)\right)+\dots+\left(u_m,(x,\ t),\right.$$

$$\left.\left[\overline{P}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]_{im}\varphi(x)\right),$$

$$\frac{d^N}{dt^N} F_i(\varphi,\ t) = \left(u_1(x,\ t),\ \left[\overline{P^N}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]_{i1}\varphi(x)\right) + \ldots + \left(u_m(x,\ t),\right.$$

$$\left.\left[\overline{P^N}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]_{im}\varphi(x)\right).$$

Отсюда видно, что $F_i(\varphi,\ t)$ в точке $t=0$ вместе со всеми своими производными обращается в нуль. Кроме того, из оценок, полученных в 2°, Б, для $\left[P^N\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]_{ij}$ и оценок (4) для $\varphi^{(q)}(x)$ следует, что

$$\left|\left[\overline{P^N}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]_{ij}\varphi(x)\right| \leqslant C_{\varphi,\varepsilon,\delta}\cdot C_0^N\cdot \nu_{[Np+h]}\cdot e^{-|ax|^{p'} l_1(|ax|)},$$

откуда

$$\left|\left(u_i(x,\ t),\ \left[\overline{P^N}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]_{ij}\varphi(x)\right)\right| \leqslant (|u_i(x,\ t)|,\ e^{-|ax|^{p'} l_1(|ax|)}) \times$$

$$\times C_{\varphi,\varepsilon,\delta}\cdot C_0^N\cdot \nu_{[Np+h]} \leqslant C_1^N \nu_{[Np+h]},$$

а значит, и

$$\left|\frac{d^N}{dt^N} F_i(\varphi,\ t)\right| \leqslant C_2^N\cdot \nu_{[Np+h]}$$

(здесь C_1, C_2 — константы, не зависящие от N).

Как известно из теории квазианалитических функций, для того, чтобы $F_i(\varphi,\ t)$ была тождественно равна нулю, достаточно, чтобы ряд

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[N]{C_2^N \nu_{[Np+h]}}} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[N]{C_2^N A^{[Np+h]}[Np+h]^{\frac{[Np+h]}{p}} l_1([N_p+h])^{\frac{[Np+h]}{p'}}}}$$

расходился. Нетрудно проверить, что этот ряд действительно расходится благодаря условию (2). Итак, $F_i(\varphi,\ t) \equiv 0$ $t \in [0,\ T]$ для любой фиксированной $\varphi \in \Phi$. Так как пространство Φ достаточно богато функциями, то отсюда следует $u_i(x,\ t) \equiv 0$, $t \in [0,\ T]$.

4°. Если сохранять при переходе к случаю $x \in E_n$ все прежние обозначения, то в качестве пространства основных функций берется пространство $\Phi = W^{\Omega_1,\ldots,\Omega_n;\ b_0,\ldots,b_0}_{M_1,\ldots,M_n;\ 1,\ldots,1}$, где $\Omega_i(x_i) = M_i(x_i) = x_i^{p'} l_1(x_i)$. Для $\varphi(x_1,\ldots,x_n) \in \Phi$ справедливы неравенства типа (4):

$$\left|\frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n}\varphi}{\partial x_1^{q_1}\ldots\partial x_n^{q_n}}\right| \leqslant C_{\varphi,\varepsilon,\delta}\cdot \nu_{q_1}\ldots\nu_{q_n} e^{-|ax_1|^{p'} l_1(|ax_1|)-\ldots-|ax_n|^{p'} l_1(|ax_n|)}.$$

Если $q_1+\ldots+q_n = q$, то нетрудно проверить, что при этом будет

$$\left|\frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n}\varphi}{\partial x_1^{q_1}\ldots\partial x_n^{q_n}}\right| \leqslant C_{\varphi,\varepsilon,\delta}\cdot \nu_q\cdot e^{-|ax_1|^{p'} l_1(|ax|_1)-\ldots-|ax_{|n|}|^{p'} l_1(|ax_n|)}. \tag{5}$$

При исследовании поведения элементов матриц $P^N\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ аналогично случаю $x \in E_1$ получается, что $\left[P^N\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]_{ij}$ представляют собой многочлены от $\frac{\partial}{\partial x_k}$ $(k=1,\ldots,n)$ степени не выше $[Np+h]$ по совокупности переменных, где p — приведенный порядок системы (1), h — постоянная величина. Вместе с (5) это дает возможность в остальном полного повторения доказательства теоремы.

Следует заметить, что доказательство можно также проводить, используя вместо $\Phi = W^{\Omega_1, \ldots, \Omega_n;\, b_0, \ldots, b_0}_{M_1, \ldots, M_n;\, 1, \ldots, 1}$ множество M функций $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1) \ldots \varphi_n(x_n)$, где $\varphi_i(x_i) \in W^{\Omega,\, b_0}_{M,\, 1}(x_i)$.

В заключение автор благодарит своего руководителя Ю. М. Березанского за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Чаус, О единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, Укр. матем. ж., т. XVI, № 3, 1964.
2. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, Обобщенные функции, изд. 3, Физматгиз, М., 1958.
3. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Гостехиздат, М., 1953.

Поступила 13.II 1964 г.
Киев