1965 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 17, № 2
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

# Предельные распределения для аддитивных функционалов от последовательности сумм независимых одинаково распределенных решетчатых случайных величин

*А. В. Скороход, Н. П. Слободенюк*

**1.** Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_k$, принимающих целочисленные значения. Пусть $p_k = P\{\xi_i = k\}$. Предположим, что $M\xi_i = 0$, $D\xi_i = 1$, $M|\xi_i|^3 < \infty$, $M\xi_i^3 = \mu$. Будем обозначать $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} \xi_i$, $S_{nk} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_k$. Пусть $f_n(x)$ — последовательность функций, определенных при всех целочисленных $x$. Нас будут интересовать условия, при которых величина

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{n} f_n(S_k) \tag{1}$$

будет иметь предельное распределение при $n \to \infty$. Предельные теоремы для величин подобного рода рассматривались авторами ранее в работах [1, 2] для того случая, когда величины $\xi_k$ имеют плотность. Здесь проводятся аналогичные исследования для решетчатых случайных величин. Правда, в отличие от указанных выше работ мы рассматриваем лишь функции, зависящие от одного аргумента, но это позволяет снять некоторые ограничения, имеющиеся в [2].

По-видимому, особый интерес представляет тот случай, когда $f_n(x) = A_n f(x) + B_n$; тогда получаются предельные теоремы для подходящим образом центрированных и нормированных величин $\Sigma f(S_k)$. Такие предельные теоремы для некоторых частных видов функции $f(x)$ изучались в [3,4].

Всюду в дальнейшем предполагается, что максимальный шаг величины $\xi_k$ равен 1, поэтому для вероятностей $p_{nk} = P\{S_n = k\}$ справедлива локальная предельная теорема с уточнением (см. [5], стр. 257). Этот факт будет использоваться ниже.

Предельные теоремы для величин (1) имеют различный вид в зависимости от поведения

$$\sum_{|j| \leqslant C\sqrt{n}} \sqrt{n} f_n^2(j).$$

В пункте 2 рассмотрен случай, когда эта величина стремится к нулю, а в третьем пункте приводится теорема для того случая, когда предел этой величины отличен от нуля.

Авторы воспользовались тем обстоятельством, что предыдущие их работы содержат довольно полную библиографию работ по затронутым вопросам, и поэтому здесь ограничились лишь необходимыми ссылками.

2. О функциях $f_n(x)$ будем предполагать, что $\mu_n = \sup\limits_x |f_n(x)| \to 0$ при $n \to \infty$. Положим

$$u_n(x) = \begin{cases} 2\sqrt{n} \sum\limits_{0 < j \leqslant x\sqrt{n}} f_n(j), & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -2\sqrt{n} \sum\limits_{x\sqrt{n} < j \leqslant 0} f_n(j), & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия:*

1) *функции $u_n(x)$ ограничены в совокупности на любом конечном интервале, и существует такая интегрируемая по Риману функция $u(x)$, что при любом $C > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|k| \leqslant C\sqrt{n}} \left| u_n\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right) - u\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right) \right| = 0;$$

2) *при любом $C \geqslant 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \left( \sqrt{n} \sum_{|j| \leqslant C\sqrt{n}} f_n^2(j) + \sqrt[4]{n} \sum_{|j| \leqslant C\sqrt{n}} |f_n(j)| \right) = 0.$$

*Тогда предельное распределение величины* (1) *существует и совпадает с распределением величины*

$$\eta = \int_0^{w(1)} u(s)\, ds - \int_0^1 u(w(t))\, dw(t),$$

*где $w(t)$ — процесс броуновского движения.*

Доказательство. Предположим сначала, что $f_n(k) \neq 0$ лишь при $|k| \leqslant C\sqrt{n}$, где $C > 0$ — некоторая постоянная. Пусть $v_n(k)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ — такая функция, что

$$M\{v_n(S_{k+1}) - v_n(S_k)/S_k\} = f_n(S_k). \tag{2}$$

Соотношение (2) эквивалентно уравнению

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} v_n(i+j)\, p_i - v_n(j) = f_n(j).$$

Положим при $|z| = 1$

$$\tilde{f}_n(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_n(j) z^j, \quad \tilde{v}_n(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_n(j) z^j, \quad \tilde{p}(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_j z^{-j}.$$

Умножая уравнение (2) на $z^j$ и суммируя по $j$ от $-\infty$ до $\infty$, получим

$$\tilde{v}_n(z)\tilde{p}(z) - \tilde{v}_n(z) = \tilde{f}_n(z).$$

Значит,

$$\tilde{v}_v(z) = \frac{\tilde{f}_n(z)\tilde{p}(z)}{\tilde{p}(z) - 1} - \tilde{f}_n(z).$$

Положим

$$c(z) = \frac{\tilde{p}(z)}{\tilde{p}(z) - 1} - \frac{2}{(z-1)^2} - \frac{2(\mu+3)}{3(z-1)}.$$

Функция $c(z)$ ограничена, поэтому она интегрируема с квадратом, и, значит, $c(z)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j z^j$, где $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_j|^2<\infty$.

Функцию $\widetilde{v}_n(z)$ можем теперь записать так:

$$\widetilde{v}_n(z)=\widetilde{f}_n(z)\,c(z)+\frac{2\widetilde{f}_n(z)}{(z-1)^2}+\frac{2\widetilde{f}_n(z)(\mu+3)}{3(z-1)}-\widetilde{f}_n(z).$$

Из этой формулы вытекает, что

$$v_n(j)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i f_n(j-i)+2\sum_{i=-\infty}^{j}\sum_{l=-\infty}^{i} f_n(l)-\frac{2(\mu+3)}{3}\sum_{i=-\infty}^{j} f_n(i)-f_n(j)=$$

$$=\psi_n(j)+\overline{U}_n(j)-\frac{(\mu+3)}{3\sqrt{n}}\overline{u}_n\left(\frac{j}{\sqrt{n}}\right)-f_n(j),$$

где

$$\psi_n(j)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i f_n(j-i),\ \overline{u}_n(x)=2\sqrt{n}\sum_{-\infty<j\leqslant x\sqrt{n}} f_n(j),$$

$$\overline{U}_n(x)=\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{n}}}\overline{u}_n(y)\,dy.$$

Воспользовавшись неравенством Коши, получим

$$\sup_j|\psi_n(j)|\leqslant O\left(\sum_{-\infty}^{\infty} f_n^2(j)\right),$$

так что $\lim_{n\to\infty}\sup_j|\psi_n(j)|=0$ ввиду условия 2). Заметим далее, что

$$\Delta_n=M\left(\sum_{k=1}^{n} M\{f_n(S_{k+1})-f_n(S_k)/S_k\}\right)^2\leqslant O(\mu_n^2)+$$

$$+2M\left(\sum_{k=2}^{n}[f_n(S_k)-M\{f_n(S_k)/S_{k-1}\}]\right)^2\leqslant O(\mu_n^2)+$$

$$+2\sum_{k=2}^{n} Mf_n^2(S_k)=O(\mu_n^2)+2\sum_{k=2}^{n}\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_n^2(j)\,p_{kj},$$

где $p_{kj}=P\{S_k=j\}$. Так как равномерно относительно $j$ $p_{kj}\leqslant\frac{L}{\sqrt{k}}$ (это вытекает из локальной предельной теоремы), то

$$\Delta_n\leqslant O(\mu_n^2)+O\left(\sqrt{n}\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_n^2(j)\right)=o(1). \qquad (3)$$

Аналогично

$$\Delta_n'=M\left|\sum_{k=1}^{n} M\{\psi_n(S_{k+1})-\psi_n(S_k)/S_k\}\right|^2\leqslant O(\sup_j|\psi_n(j)|^2)+$$

$$+O\left(\sqrt{n}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\psi_n(j)|^2\right).$$

А так как

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_n(j)|^2 \leqslant \sum_{l=-\infty}^{\infty} |f_n(l)| \sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_j|^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} |f_n(i-j)| =$$

$$= O\left(\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} |f_n(j)|\right]^2\right),$$

то

$$\Delta_n' \leqslant O(\sup |\psi_n(j)|^2) + O\left(\sqrt{n}\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} |f_n(j)|\right]^2\right) = o(1). \tag{4}$$

Легко видеть, что

$$M\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} M\{\overline{u}_n(S_{k+1}) - \overline{u}_n(S_k)/S_k\}\right)^2 = o(1). \tag{5}$$

Из оценок (3) — (5) вытекает, что предельное распределение величины (1) существует тогда и только тогда, когда существует предельное распределение величины

$$\sum_{k=1}^{n} M\{\overline{U}_n(S_{k+1}) - \overline{U}_n(S_k)/S_k\}, \tag{6}$$

причем оба предельных распределения совпадают.

Положим

$$v_n(j, k) = \overline{U}_n(k) - \overline{U}_n(j) - \overline{u}_n\left(\frac{j}{\sqrt{n}}\right)\frac{k-j}{\sqrt{n}}.$$

Тогда

$$\gamma_n = M\left(\sum_{k=1}^{n} [v_n(S_k, S_{k+1}) - M\{v_n(S_k, S_{k+1})/S_k\}]\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} M v_n^2(S_k, S_{k+1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} M\left(\int_{S_{nk}}^{S_{nk+1}} [\overline{u}_n(t) - \overline{u}_n(S_{nk})]\,dt\right)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\int_{\frac{j}{\sqrt{n}}}^{\frac{j+i}{\sqrt{n}}} \left[\overline{u}_n(t) - \overline{u}_n\left(\frac{j}{\sqrt{n}}\right)\right] dt\right)^2 p_i p_{kj} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=-\infty}^{\infty} |i|\, p_i \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_{kj} \left|\int_{\frac{j}{\sqrt{n}}}^{\frac{j+i}{\sqrt{n}}} \left[\overline{u}_n(t) - \overline{u}_n\left(\frac{j}{\sqrt{n}}\right)\right]^2 dt\right|.$$

Так как $\overline{u}_n(x) = u_n(x) - u_n(-\infty)$, то, ввиду условия 1), функции $\overline{u}_n(x)$ ограничены в совокупности ($|\overline{u}_n(x)| \leqslant K$) и почти для всех $x$ $\overline{u}_n(x) \to \overline{u}(x) = u(x) - u(-\infty)$, причем

$$\lim_{n\to\infty} \sup_j \left|\overline{u}_n\left(\frac{j}{\sqrt{n}}\right) - \overline{u}\left(\frac{j}{\sqrt{n}}\right)\right| = 0.$$

Для любых чисел $A > 0$ и целого $N > 0$

$$\gamma_n \leqslant 4K^2 \sum_{|i|>N} i^2 p_i + \frac{4K^2}{n} \sum_{k=1}^{n} P\{S_k > A\sqrt{n}\} +$$

$$+ \frac{2K}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sum_{|i|\leqslant N} |i| p_i \sum_{|j|\leqslant A\sqrt{n}} p_{kj} \left| \int\limits_{\frac{j}{\sqrt{n}}}^{\frac{j+i}{\sqrt{n}}} \left| \bar{u}_n(t) - \bar{u}_n\left(\frac{j}{\sqrt{n}}\right) \right| dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant 4K^2 \left(\frac{1}{A^2} + \sum_{|i|>N} i^2 p_i\right) + O\left(NA \int\limits_{-A}^{A} |\bar{u}_n(t) - \bar{u}(t)|\, dt\right) +$$

$$+ O\left(NA \sup_{|j|\leqslant A\sqrt{n}} \left| \bar{u}_n\left(\frac{j}{\sqrt{n}}\right) - \bar{u}\left(\frac{j}{\sqrt{n}}\right) \right| \right) +$$

$$+ O\left(\frac{N}{\sqrt{n}} \sum_{|j|\leqslant A\sqrt{n}} \sup_{\frac{j}{\sqrt{n}} < t \leqslant \frac{j+1}{\sqrt{n}}} \left| \bar{u}(t) - \bar{u}\left(\frac{j}{\sqrt{n}}\right) \right| \right).$$

Величины, стоящие под знаком $O$ в правой части последнего неравенства, стремятся к нулю при любых $A$ и $N$, а первое слагаемое можно сделать сколь угодно малым, выбирая достаточно большие $A$ и $N$.

Таким образом, предельное распределение величины (1) совпадает с предельным распределением величины

$$\bar{U}_n(S_n) - \bar{U}_n(0) - \sum_{k=1}^{n} \bar{u}_n(S_{nk}) \frac{\xi_{k+1}}{\sqrt{n}}. \tag{7}$$

Предельное же распределение величины (7) существует и совпадает с распределением величины

$$\int\limits_0^{w(1)} \bar{u}(s)\, ds - \int\limits_0^1 \bar{u}(w(t))\, dw(t) = \int\limits_0^{w(1)} u(s)\, ds - \int\limits_0^1 u(w(t))\, dw(t).$$

Последнее утверждение может быть доказано так же, как это сделано в работе [2], при этом потребуются лишь некоторые незначительные изменения в выкладках.

Теорема доказана для случая, когда $f_n(k) \neq 0$ лишь при $|k| \leqslant C\sqrt{n}$. Распространение теоремы на общий случай может быть проведено точно таким же образом, как в [1].

Замечание. В случае, когда функции $f_n(x)$ неотрицательны, условие 2) теоремы является следствием условия 1), так как

$$\sum_{|j|\leqslant C\sqrt{n}} \sqrt{n} f_n^2(j) \leqslant \mu_n \sum_{|j|\leqslant C\sqrt{n}} f_n(j)$$

и

$$\sum_{|j|\leqslant C\sqrt{n}} \sqrt[4]{n} |f_n(j)| \leqslant \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \sum_{|j|\leqslant C\sqrt{n}} \sqrt{n} f_n(j).$$

3. В этом пункте рассматривается случай, когда $\sum\limits_{|k|\leqslant C\sqrt{n}} \sqrt{n} f_n^2(k)$ не стремится к нулю. Положим

$$g_n(x) = \begin{cases} 2\sqrt{n} \sum\limits_{0<k\leqslant x\sqrt{n}} f_n^2(k) & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -2\sqrt{n} \sum\limits_{x\sqrt{n}<k\leqslant 0} f_n^2(k) & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Имеет место

Теорема 2. *Пусть величины $\xi_k$ удовлетворяют перечисленным выше условиям и имеют конечный четвертый момент, а $f_n(k)$ таковы, что*

1) *существует функция ограниченной вариации $u(x)$ такая, что для всех $C > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|k|\leqslant C\sqrt{n}} \left| u_n\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right) - u\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right) \right| = 0;$$

2) *при некотором $\varepsilon > 0$, каково бы ни было $C > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} n^{\varepsilon} \sum_{|k|\leqslant C\sqrt{n}} |f_n(k)| = 0;$$

3) *существует функция $g(x)$ такая, что почти для всех $x$ $g_n(x) \to g(x)$.*

*Тогда предельное распределение величины $\eta_n$ существует и совпадает с распределением величины*

$$\int_0^{w(1)} u(x)\,dx - \int_0^1 u(w(t))\,dw(t) + \omega \sqrt{\int_0^{w(1)} g(x)\,dx - \int_0^1 g(w(t))\,dw(t)}, \qquad (8)$$

*где $w(t)$ — процесс броуновского движения, а $\omega$ — не зависящая от $w(t)$ нормально распределенная величина, для которой $M\omega = 0$, $D\omega = 1$.*

Доказательство. Ограничимся, как и в теореме 1, случаем, когда $f_n(k)$ отлично от нуля лишь при $|k| \leqslant C\sqrt{n}$. Введем функции

$$\bar{f}_n(k) = f_n(k) - \frac{1}{2\sqrt{n}} \left[ u\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right) - u\left(\frac{k-1}{\sqrt{n}}\right) \right].$$

Легко видеть, что функции $\bar{f}_n(k)$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{n\to\infty} \sup_x \left| \sum_{k\leqslant x\sqrt{n}} \sqrt{n}\, \bar{f}_n(k) \right| = 0, \qquad (9)$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{\varepsilon} \sum_k |\bar{f}_n(k)| = 0, \qquad (10)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\leqslant x\sqrt{n}} 2\sqrt{n}\, \bar{f}_n^2(k) = g(x) - g(-\infty). \qquad (11)$$

Для доказательства теоремы нам понадобятся некоторые вспомогательные предложения. Мы будем использовать при их выводе следующее асимптотическое представление вероятностей $p_{kl} = P\{S_k = l\}$:

$$p_{kl} = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} e^{-\frac{l^2}{2k}} \left\{ 1 + \frac{\mu}{\sqrt{k}} \left[ \left(\frac{l}{\sqrt{k}}\right)^3 - 3\frac{l}{\sqrt{k}} \right] \right\} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$$

(см. [5], стр. 257). Из (9) можно вывести такие неравенства:

$$\left|\sum_k \bar{f}_n(k)\,h(k)\right| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}}\operatorname{var} h,$$

$$\left|\sum_{k,j} \bar{f}_n(k)\,\bar{f}_n(j)\,h(k,j)\right| \leqslant \frac{\varepsilon_n^2}{n}\operatorname{var} h, \tag{12}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left|\sum_{k_1,\ldots,k_r} \bar{f}_n(k_1)\ldots\bar{f}_n(k_r)\,h(k_1,\ldots,k_r)\right| \leqslant \frac{\varepsilon_n^r}{n^{r/2}}\operatorname{var} h;$$

здесь $\varepsilon_n = \sup\limits_x \left|\sum\limits_{k\leqslant x\sqrt{n}} \sqrt{n}\,\bar{f}_n(k)\right|$, $\operatorname{var} h$, где $h$ — функция $r$ целочисленных переменных, определяется по формуле:

$$\operatorname{var} h = \sum_{k_1,\ldots,k_r} |\Delta^{(1)}\ldots\Delta^{(r)} h(k_1,\ldots,k_r)|,$$

$$\Delta^{(i)} h(k_1,\ldots,k_r) = h(k_1,\ldots,k_i+1,\ldots,k_r) - h(k_1,\ldots,k_i,\ldots,k_r).$$

Лемма 1. *Пусть* $\zeta_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \bar{f}_n^2(S_k)$. *Тогда*

$$\zeta_n^m - m!\sum_{k_1<\ldots<k_m} \bar{f}_n^2(S_{k_1})\,\bar{f}_n^2(S_{k_2})\ldots\bar{f}_n^2(S_{k_m}) \to 0$$

*по вероятности.*

Действительно,

$$0 < \zeta_n^m - m!\sum_{k_1<\ldots<k_m} \bar{f}_n^2(S_{k_1})\ldots\bar{f}_n^2(S_{k_m}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=1}^{m-1}\ \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_l=m\\ \alpha_i>0}}\ \sum_{k_1<\ldots<k_l} \frac{m!}{\alpha_1!\ldots\alpha_l!}\,\bar{f}_n^{2\alpha_1}(S_{k_1})\ldots\bar{f}_n^{2\alpha_l}(S_{k_l}) \leqslant \mu_n^2 O(\zeta_n^{m-1}).$$

Остается отметить, что выражение

$$M\sum_{k_1<\ldots<k_m} \bar{f}_n^2(S_{k_1})\ldots\bar{f}_n^2(S_{k_m}) = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m} \bar{f}_n^2(\alpha_1)\ldots\bar{f}_n^2(\alpha_m)\,\times$$

$$\times \sum_{1\leqslant k_1<\ldots<k_m\leqslant n} p_{k_1\alpha_1}\,p_{k_2-k_1\,\alpha_2-\alpha_1}\ldots p_{k_m-k_{m-1}\,\alpha_m-\alpha_{m-1}} \leqslant \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m} \bar{f}_n^2(\alpha_1)\ldots\bar{f}_n^2(\alpha_m)\,\times$$

$$\times \sum_{1\leqslant k_1<\ldots<k_m\leqslant n} \frac{1}{\sqrt{k_1(k_2-k_1)\ldots(k_m-k_{m-1})}} = O\left(\left[\sum_\alpha \sqrt{n}\,\bar{f}_n^2(\alpha)\right]^m\right)$$

является величиной ограниченной.

Лемма 2. *Каковы бы ни были числа* $\alpha_1 > 1,\ \alpha_2 > 1,\ldots,\alpha_l > 1$ *и* $r$

$$M\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} \bar{f}_n(S_{i_1})\ldots\bar{f}_n(S_{i_r}) \sum_{j_1<j_2<\ldots<j_l} \bar{f}_n^{\alpha_1}(S_{j_1})\ldots\bar{f}_n^{\alpha_l}(S_{j_l}) \to 0.$$

Доказательство. Нужно рассматривать лишь те слагаемые, в которых $i_1, i_2, \ldots, i_r$ и $j_1, j_2, \ldots, j_r$ различны, так как остальные можно сгруппировать в суммы, не содержащие первых степеней, либо в суммы с другими $i$ и $\alpha$, но различными $i$ и $j$. Суммы же, не содержащие первых степеней, но содержащие степени выше второй, оцениваются точно так, как в лемме 1. Можем теперь ограничиться каким-либо фиксированным расположением $i$ и $j$. Для удобства записи рассмотрим случай $r=2$ и $l=2$. Тогда суммы имеют вид:

$$\sum_{i_1<\ldots<i_4} \bar f_n^{\alpha_1}(S_{i_1})\bar f_n^{\alpha_2}(S_{i_2})\bar f_n(S_{i_3})\bar f_n(S_{i_4}), \quad \sum_{i_1<\ldots<i_4} \bar f_n^{\alpha_1}(S_{i_1})\bar f_n(S_{i_2})\bar f_n^{\alpha_2}(S_{i_3})\bar f_n(S_{i_4})$$

и т. д. Математическое ожидание этих сумм оценивается одинаково. Например, для первой имеем:

$$M\sum_{i_1<i_2<i_3<i_4} \bar f_n^{\alpha_1}(S_{i_1})\bar f_n^{\alpha_2}(S_{i_2})\bar f_n(S_{i_3})\bar f_n(S_{i_4}) = \sum_{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4} \bar f_n^{\alpha_1}(\beta_1)\bar f_n^{\alpha_2}(\beta_2)\bar f_n(\beta_3)\bar f_n(\beta_4)\times$$
$$\times\sum_{i_1<i_2<i_3<i_4} p_{i_1\beta_1}p_{i_2-i_1\beta_2-\beta_1}p_{i_3-i_2\beta_3-\beta_2}p_{i_4-i_3\beta_4-\beta_3}.$$

Заметим, что используя асимптотическое представление для $p_{kl}$, можем убедиться в справедливости соотношения

$$\sum_{i_1<i_2<i_3<i_4} p_{i_1\beta_1}p_{i_2-i_1\beta_2-\beta_1}p_{i_3-i_2\beta_3-\beta_2}p_{i_4-i_3\beta_4-\beta_3} = n^2\psi_n(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)+$$
$$+n\ln^2 n\,\psi_n^{(1)}(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4),$$

где $\psi_n$ — функция ограниченной вариации по всем аргументам (равномерно относительно $n$), а $\psi_n^{(1)}$ равномерно относительно $n$ ограничена. Таким образом,

$$n^2\sum_{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4} \bar f_n^{\alpha_1}(\beta_1)\bar f_n^{\alpha_2}(\beta_2)\bar f_n(\beta_3)\bar f_n(\beta_4)\psi_n(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)+$$
$$+n\ln^2 n\sum_{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4} \bar f_n^{\alpha_1}(\beta_1)\bar f_n^{\alpha_2}(\beta_2)\bar f_n(\beta_3)\bar f_n(\beta_4)\psi_n^{(1)}(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=$$
$$=O\Big(n\varepsilon_n^2\sum_{\beta_1,\beta_2}\bar f_n^{\alpha_1}(\beta_1)\bar f_n^{\alpha_2}(\beta_2)\operatorname{var}_{\beta_3,\beta_4}\psi_n(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)\Big)+$$
$$+O\Big(\ln^2 n\Big(\sum_\beta|\bar f_n(\beta)|\Big)^2\Big(\sqrt{n}\sum_\beta \bar f_n^2(\beta)\Big)^2\Big)=$$
$$=O\Big(\varepsilon_n^2+\ln^2 n\Big(\sum_\beta|\bar f_n(\beta)|\Big)^2\Big)\to 0.$$

Аналогичные оценки имеют место и в остальных случаях.

Лемма доказана.

Следствие из лемм 1 и 2. Пусть целые числа $\alpha_i>0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} M\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} \bar f_n^{\alpha_1}(S_{i_1})\bar f_n^{\alpha_2}(S_{i_2})\ldots\bar f_n^{\alpha_k}(S_{i_k})$$

может быть отличным от нуля лишь в том случае, когда $\alpha_i=2$.

Лемма 3. *Положим*

$$\varphi_n=\frac{1}{2\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left[u\left(\frac{S_k}{\sqrt n}+\frac{1}{\sqrt n}\right)-u\left(\frac{S_k}{\sqrt n}\right)\right].$$

*Тогда для целых $\alpha_i>0$ выражение*

$$\lim_{n\to\infty} M\varphi_n^k\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} \bar f_n^{\alpha_1}(S_{i_1})\bar f_n^{\alpha_2}(S_{i_2})\ldots\bar f_n^{\alpha_r}(S_{i_r})$$

*может быть отличным от нуля лишь при условии $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_r=2$.*

Эта лемма может быть доказана с помощью оценок, аналогичных тем, которые получены в леммах 1 и 2.

Приступим теперь к доказательству теоремы. Можем считать, что величины $\varphi_n$, $\zeta_n$ и $\chi_n = \sum_{k=1}^{n} f_n(S_k)$ имеют пределы в смысле сходимости по вероятности (см. [6], стр. 17, замечание 2, и следствие 1). Обозначим эти пределы через $\varphi, \zeta$ и $\chi$ соответственно. Тогда предельное распределение величины $\eta_n$ совпадает с распределением величины $\varphi + \chi$. Каковы бы ни были многочлены $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$, выполняется соотношение

$$M\Phi_1(\varphi)\,\Phi_2(\zeta)\,\Phi_3(\chi) = \lim_{n\to\infty} \Phi_1(\varphi_n)\,\Phi_2(\zeta_n)\,\Phi_3(\chi_n).$$

Далее,

$$\lim_{n\to\infty} M\chi_n^k \zeta_n^l \varphi_n^m = \lim_{n\to\infty} M\zeta_n^l \varphi_n^m \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=k} \bar{f}_n^{\alpha_1}(S_1)\ldots \bar{f}_n^{\alpha_n}(S_n).$$

На основании леммы 3 в этой сумме отличными от нуля будут лишь те слагаемые, у которых $\alpha_i$ принимают значения только 0 и 2. Поэтому этот предел может быть отличным от нуля лишь при $k$ четном и

$$\lim_{n\to\infty} M\chi_n^{2k} \zeta_n^l \varphi_n^m = \lim_{n\to\infty} \frac{(2k)!}{2^k} M\zeta_n^l \varphi_n^m \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} \bar{f}_n^2(S_{i_1})\ldots \bar{f}_n^2(S_{i_k}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2k)!}{2^k} M\zeta_n^k \zeta_n^l \varphi_n^m.$$

Таким образом,

$$M\chi^k \zeta^l \varphi^m = \begin{cases} \dfrac{k!}{2^{k/2}} M\zeta^{\frac{k}{2}} \zeta^l \varphi^m, & \text{если } k \text{ четное,} \\ 0, & \text{если } k \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Из последнего соотношения вытекает, что условное распределение величины $\chi$ при фиксированных $\zeta$ и $\varphi$ является нормальным с дисперсией 1. Следовательно, $\frac{\chi}{\sqrt{\zeta}}$ является величиной, не зависящей от $\varphi$ и $\zeta$ и имеющей нормальное распределение со средним 0 и дисперсией 1. Полагая $\omega = \frac{\chi}{\sqrt{\zeta}}$ и учитывая, что ввиду теоремы 1 совместное распределение $\varphi$ и $\zeta$ совпадает с совместным распределением величин

$$\int_0^{w(1)} u(x)\,dx - \int_0^1 u(w(t))\,dw(t) \text{ и } \int_0^{w(1)} g(x)\,dx - \int_0^1 g(w(t))\,dw(t),$$

убеждаемся в справедливости теоремы.

## ЛИТЕРАТУРА


1. А. В. Скороход, Некоторые предельные теоремы для аддитивных функционалов от последовательностей сумм независимых случайных величин, УМЖ, т. 13, № 4, 1961.
2. Н. П. Слободенюк, Некоторые предельные теоремы для аддитивных функционалов от последовательности сумм независимых случайных величин, УМЖ, т. 16, № 1, 1964.
3. G. Kallianpur, H. Robbins, The sequence of sums of independent random variables, D. Math. J., **21**, 1954, 285—307.
4. Р. Л. Добрушин, Две предельные теоремы для простейшего блуждания по прямой, УМН, т. 10, вып. 3, 1955.
5. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
6. А. В. Скороход, Исследования по теории случайных процессов, Изд-во Киевск. ун-та, К., 1961.



Поступила 26.X 1964 г.
Киев