Некоторые замечания о группах с единственной минимальной системой силовских классов

С. П. Азлецкий

Пусть группа $\mathfrak{G}$ имеет порядок $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — различные простые числа и $k > 1$. Пусть $\mathfrak{P}_i$ — некоторая силовская подгруппа порядка $p_i^{\alpha_i}$ группы $\mathfrak{G}$, а $\langle \mathfrak{P}_i \rangle$ — силовский класс, т. е. множество всех силовских подгрупп порядка $p_i^{\alpha_i}$ группы $\mathfrak{G}$. Пусть силовские классы: $\langle \mathfrak{N}_1 \rangle$, $\langle \mathfrak{P}_2 \rangle, \ldots, \langle \mathfrak{P}_r \rangle$, $r \leqslant k$, образуют некоторую минимальную систему группы $\mathfrak{G}$, т. е. порождают группу $\mathfrak{G}$, и число таких классов является при этом минимальным.

Одним из существенных вопросов оказывается вопрос о выделении классов групп с единственной минимальной системой и об особенностях силовских классов, входящих в минимальную систему группы. Ранее нами был получен ряд результатов в этом направлении в статьях [1, 2]. Все приведенные в этих статьях классы конечных групп с единственной минимальной системой обладают следующей особенностью: минимальная система всех таких групп состоит из силовских классов группы $\mathfrak{G}$, не содержащихся в ее коммутанте. Так как всякий силовский класс группы, не содержащийся в коммутанте группы, входит в любую систему силовских классов, порождающих группу, то класс групп с этой особенностью является классом с минимальным возможным набором силовских классов в минимальной системе, если группа отлична от своего коммутанта.

До сих пор оставался не выясненным вопрос о том, существуют ли группы с единственной минимальной системой, которая состоит не только из силовских классов, не содержащихся в коммутанте группы, но и из классов, содержащихся в нем, а также вопрос о том, может ли группа, совпадающая со своим коммутантом, иметь единственную минимальную систему? Найденный недавно Судзуки новый тип простых групп конечного порядка [3] позволяет построить примеры групп с указанными минимальными системами и, тем самым, решить положительно вопрос об их существовании. Ниже приводятся примеры таких групп.

П р и м е р 1. Пусть $\mathfrak{B}_1$ — простая группа Судзуки из серии простых групп порядка $q^2 \cdot (q-1)(q^2+1)$, где $q = 2^{2n+1}$ при $n=2$ [3], т. е. $\mathrm{Ord}(\mathfrak{B}_1) = 32\,537\,600 = 2^{10} \cdot 5^2 \cdot 31 \cdot 41$. Пусть $\mathfrak{B}_2$ — простая группа 168 порядка, $\mathrm{Ord}(\mathfrak{B}_2) = 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$. Тогда прямое произведение этих групп: $\mathfrak{G} = \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$ будет группой с единственной минимальной системой, состоящей из класса силовских подгрупп группы $\mathfrak{G}$ по числу 2. Очевидно, что группа $\mathfrak{G}$ совпадает со своим коммутантом.

П р и м е р 2. Пусть группа $\mathfrak{G}^*$ является прямым произведением группы $\mathfrak{G}$ из примера первого на абелеву группу $\mathfrak{A}$ порядка p, где p — простое число, отличное от чисел 2, 3, 5, 7, 31, 41, $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G} \times \mathfrak{A}$. Группа $\mathfrak{G}^*$ имеет единственную минимальную систему, состоящую из класса силовских подгрупп группы $\mathfrak{G}^*$ по числу p, т. е. силовского класса, не содержащегося в коммутанте группы $\mathfrak{G}^*$, и из класса силовских подгрупп по числу 2, содержащегося в коммутанте группы $\mathfrak{G}^*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Азлецкий, О порождении конечной группы системой силовских классов, Матем. сб., т. 28 (70), № 2, 1951, 461—466.
2. С. П. Азлецкий, О системах силовских классов конечной группы, Матем. сб., т. 29 (71), № 3, 1951, 581—586.
3. Suzuki Michio, A new type of simple groups of finite order, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., t. 46, № 6, 1960, 868—870.

Поступила 28. XII 1961 г.
Свердловск