О двух типах условно-экстремальных задач и общем подходе к их исследованию

В. Н. Буров

§ 1. Геометрический метод и его приложения

Пусть X — линейное нормированное пространство (вещественное или комплексное) и пусть для фиксированного элемента $f \in X$ решается вопрос о приближенном представлении его в метрике X посредством «элементов сравнения» φ из заранее указанного локально-компактного (в себе) множества $\Omega \subset X$, не содержащего f. Нас будут интересовать минимальная и максимальная погрешности такого представления, в связи с чем рассмотрим две следующие экстремальные задачи.

Задача I. *Найти совокупность $e[\Omega]$ всех тех элементов $\varphi^* \in \Omega$, для которых*

$$\|\varphi^* - f\| = \inf_{\varphi \in \Omega} \|\varphi - f\| \equiv m[\Omega]. \tag{1}$$

Задача II. *Найти совокупность $E[\Omega]$ всех тех элементов $\Phi^* \in \Omega$, для которых*

$$\|\Phi^* - f\| = \sup_{\varphi \in \Omega} \|\varphi - f\| \equiv M[\Omega]. \tag{2}$$

Естественно, задача II имеет смысл лишь при условии ограниченности Ω, тогда как для задачи I этого не требуется. В случае полиномиальной аппроксимации задание множества Ω равносильно наложению некоторых ограничений («связей») на коэффициенты приближающих полиномов. Такого рода задачи были названы в [7] условно-экстремальными.

Для исследования обеих задач можно применить единый метод, представляющий дальнейшее развитие идей работы автора [9]. Именно, из локальной компактности Ω не только вытекает разрешимость задач I и II (вообще говоря, не однозначная), но также получаются сразу следующие геометрические характеристики их решений:

$$m \equiv m[\Omega] = \min_{\Omega \cap S_\varrho[f] \neq \Lambda} \varrho, \quad e[\Omega] = \Omega \cap S_m[f], \tag{3}$$

$$M \equiv M[\Omega] = \sup_{\Omega \setminus S_\varrho[f] \neq \Lambda} \varrho, \quad E[\Omega] = \Omega \cap \mathrm{Fr} S_M[f], \tag{4}$$

где $S_\varrho[f]$ обозначает замкнутую сферу пространства X с центром в f радиуса ϱ, а Λ — знак пустого множества.

Ясно, что всегда $m[\Omega] \leqslant M[\Omega]$, причем равенство возможно в том и только в том случае, когда Ω целиком состоит из граничных точек какой-либо сферы $S_{\varrho_0}[f]$, и тогда $m[\Omega] = M[\Omega] = \varrho_0$.

Из двух рассматриваемых задач более изученной является задача I. Например, при выпуклом Ω и вещественном X для нее установлено [2] следующее соотношение двойственности:

$$m[\Omega] = \max_{F(\varphi - f) \geqslant 1} \frac{1}{\|F\|} = \max_{\substack{F(\varphi - f) > 0 \\ \|F\| = 1}} \min_{\varphi \in \Omega} F(\varphi - f), \tag{5}$$

где $F(x)$ — обозначение линейного функционала в пространстве X.

Однако для задачи II имеют место еще более простые критерии, основанные на том же принципе двойственности.

Теорема 1. *Для произвольного компактного в себе множества $\Omega \subset X$ справедлива формула*

$$M[\Omega] = \max_{\|F\|=1} \max_{\varphi \in \Omega} |F(\varphi - f)|. \tag{6}$$

При этом необходимым и достаточным условием экстремальности элемента $\Phi^* \in \Omega$ в смысле (2) является существование линейного функционала F^* с нормой $\|F^*\| = 1$, для которого

$$F^*(\Phi^* - f) = M[\Omega]. \tag{7}$$

Действительно, при $\|F\| = 1$ и любом $\varphi \in \Omega$ всегда $|F(\varphi - f)| \leqslant \leqslant \|\varphi - f\| \leqslant M[\Omega]$. В то же время для $\Phi^* \in E[\Omega]$ по теореме о достаточном числе линейных функционалов (см., например, [4], гл. IV) гарантировано существование F^*, реализующего равенство (7). Отсюда следует также (6), что и требовалось доказать.

Если пространство X вещественно, то можно придать теореме 1 геометрическую формулировку, и тогда получим для задачи II следующий критерий экстремальности: *для того чтобы имело место $\Phi^* \in E[\Omega]$, необходимо и достаточно, чтобы в пространстве X существовала гиперплоскость, проходящая через точку Φ^*, опорная одновременно к выпуклой оболочке множества Ω и к сфере $S_{\varrho^*}[f]$, где $\varrho^* = \|\Phi^* - f\|$, и такая, что f и Ω располагаются от нее по одну и ту же сторону.*

Из соотношений (6), (7) и (3) вытекает, что между задачами II и I существует прямая связь. Именно, если обозначить через Ω^* линейное многообразие, определяемое соотношением вида $F^*(x - f) = M[\Omega]$, где F^* — один из функционалов, фигурирующих в (7), то для решений задач II, I с множествами элементов сравнения соответственно Ω, Ω^* оказывается

$$M[\Omega] = m[\Omega^*], \quad E[\Omega] \cap e[\Omega^*] \neq \Lambda. \tag{8}$$

Эта зависимость позволяет использовать для исследования задачи II некоторые из ранее известных факторов относительно задачи I, в том числе результатов автора [9], установленных путем упоминавшегося «геометрического» подхода.

Возвращаясь к задачам типа I, дадим геометрически наглядное решение следующей задачи.

Задача. *Среди вещественных обобщенных полиномов*

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \psi_j(t), \qquad t \in [a, b] \tag{9}$$

требуется найти наименее уклоняющийся от нуля в метрике C при дополнительном условии, что изображающая точка $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ в n-мерном пространстве коэффициентов лежит на заданной поверхности Γ, замкнутой, выпуклой и симметричной относительно всех координатных гиперплоскостей.*

* Например, такой поверхностью является n-мерный эллипсоид

$$\sum_{j=1} \gamma_j^2/\alpha_j^2 = 1.$$

В этой задаче $f=0$, $\|\varphi\| = \max_{a\leq t\leq b} |\varphi(t)|$, $\Omega \simeq \Gamma$. Если предполагать, что при каждом j_0 функции $\{\psi_j(t)\}_{j\neq j_0}$ образуют на $[a, b]$ систему Чебышева порядка $n-1$, то совокупность решений $e[\Gamma]$ исчерпывается двумя полиномами:

$$\varphi^*_{1,2}(t) = \pm k\cdot T(t), \tag{10}$$

где $T(t) = \psi_n(t) + \sum_{j=1}^{n-1} c_j\psi_j(t)$ — обобщенный полином Чебышева, наименее уклоняющийся от нуля на $[a, b]$ среди полиномов (9) со старшим коэффициентом $\gamma_n = 1$, а k — нормирующий множитель, обеспечивающий выполнение условия $(kc_1, kc_2, \ldots, kc_{n-1}, k) \in \Gamma$. Справедливость данного утверждения вытекает из экстремальных свойств коэффициентов полинома $T(t)$ (см. [1], стр. 25—26), именно: если $\|\varphi\| \leq k\cdot\|T\|$, то соответственно и

$$|\gamma_j| \leq k\cdot|c_j| \qquad (j = 1, 2, \ldots, n;\ c_n = 1), \tag{11}$$

причем равенства возможны лишь в случае* $\varphi(t) = \pm k\cdot T(t)$. Следовательно, на поверхности n-мерного параллелепипеда, определяемого формально неравенствами (11), будут обладать минимальной нормой лишь две его вершины (10). Но, в силу выбора k, сам параллелепипед окажется вписанным в симметричную выпуклую поверхность Γ, которая пройдет, таким образом, через все его вершины. Остается применить критерий экстремальности (3). В частности, условиям последней задачи удовлетворяют алгебраические полиномы по системе степеней $\psi_j(t) \equiv t^{p_j}$ $(0 = p_1 < p_2 < \ldots < p_n)$ на всяком конечном промежутке $[a, b] \subset (0, +\infty)$. В ,,предельном" случае $a=0$ первое из неравенств (11) может обращаться в равенство для более широкого множества полиномов, чем (10). Тем не менее при строго выпуклой поверхности Γ множество решений $e[\Gamma]$ по-прежнему будет состоять только из двух полиномов $\pm k\cdot T(t)$.

Для промежутка $[0, b]$ и системы последовательных степеней $p_j = j-1$ можно написать явное выражение (с точностью до постоянного множителя):

$$T(t) = \cos(n-1)\arccos(2t/b - 1) = \cos 2(n-1)\arccos\sqrt{t/b}. \tag{12}$$

В общем случае краевой характер экстремумов (3), (4) в задачах I, II открывает возможность эффективного применения различных методов математического программирования, что для частного вида задачи I фактически и было использовано Е. Г. Гольштейном [3].

§ 2. Обобщение предельного процесса Пойа—Джексона—Жюлиа

Пусть теперь на одной и той же линейной системе элементов $\{x\} \equiv X$, содержащей f и множество Ω, задана шкала пространств**, т. е. однопараметрическое семейство нормированных (не обязательно полных) пространств $X^{(\alpha)}$ $(\alpha \in [\alpha_0, \beta],\ \beta \leq +\infty)$ с нормой $\|x\|_\alpha$, монотонно возрастающей по α

$$\|x\|_{\alpha_1} \leq \|x\|_{\alpha_2} \qquad (\alpha_1 < \alpha_2) \tag{13}$$

и непрерывной на правом конце отрезка значений параметра

$$\lim_{\alpha\to\beta} \|x\|_\alpha = \|x\|_\beta \tag{14}$$

при любом $x \in X$. Множество элементов сравнения Ω в нижеследующих рассмотрениях будем предполагать компактом в метрике пространства $X^{(\beta)}$.

* При переходе от отрезка $[a, b]$ к произвольному компакту Q для обеспечения неравенств (11) потребовались бы дополнительные ограничения (см. [8], теоремы 4—6).

** Приводимое ниже определение шкалы пространств несколько отличается от общепринятого (ср., например, [5], § 5).

Сопоставим каждому вещественному числу $\xi \in [\alpha_0, \beta)$ два объединения

$$h_\xi[\Omega] = \bigcup_{\xi \leqslant \alpha < \beta} e_\alpha[\Omega], \quad H_\xi[\Omega] = \bigcup_{\xi \leqslant \alpha < \beta} E_\alpha[\Omega], \tag{15}$$

где $e_\alpha[\Omega] = \{\varphi_\alpha^*\}$, $E_\alpha[\Omega] = \{\Phi_\alpha^*\}$ — множества экстремальных элементов задач I, II в пространстве $X^{(\alpha)}$. Очевидно, $h_\xi[\Omega]$, $H_\xi[\Omega] \subset \Omega$, причем оба названные объединения уменьшаются с возрастанием ξ. Обозначив через $h'_\xi[\Omega]$, $H''_\xi[\Omega]$ производные множества (т. е. множества предельных точек) в в метрике $X^{(\beta)}$ соответственно для $h_\xi[\Omega]$, $H_\xi[\Omega]$, образуем пересечения

$$h^*[\Omega] = \bigcap_{\xi \in [\alpha_0, \beta)} h'_\xi[\Omega], \; H^*[\Omega] = \bigcap_{\xi \in [\alpha_0, \beta)} H'_\xi[\Omega]. \tag{16}$$

Ввиду компактности Ω должно быть $h^*[\Omega]$, $H^*[\Omega] \subset \Omega$. Более того, справедлива

Теорема 2. *Для решений задач* I, II *в шкале пространств* $X^{(\alpha)}$ ($\alpha < \beta$) *при закрепленном множестве элементов сравнения* Ω, *являющемся компактом в метрике* $X^{(\beta)}$, *необходимо выполняются предельные соотношения*

$$\lim_{\alpha \to \beta} m_\alpha[\Omega] = m_\beta[\Omega], \quad \lim_{\alpha \to \beta} M_\alpha[\Omega] = M_\beta[\Omega], \tag{17}$$

$$h^*[\Omega] \subset e_\beta[\Omega], \quad H^*[\Omega] \subset E_\beta[\Omega]. \tag{18}$$

Доказательство.* Для задачи I при $\alpha_1 < \alpha_2 \leqslant \beta$ имеем

$$m_{\alpha_1}[\Omega] = \| \varphi_{\alpha_1}^* - f \|_{\alpha_1} \leqslant \| \varphi_{\alpha_2}^* - f \|_{\alpha_1} \leqslant \| \varphi_{\alpha_2}^* - f \|_{\alpha_2} = m_{\alpha_2}[\Omega],$$

откуда следует существование предела

$$\lim_{\alpha \to \beta} m_\alpha[\Omega] \leqslant m_\beta[\Omega]. \tag{19}$$

Далее, если $\varphi_0 \in h^*[\Omega]$, то найдется последовательность

$$\varphi_{\alpha_i}^* \underset{(\beta)}{\to} \varphi_0,$$

где $\alpha_i \to \beta$ при $i \to \infty$.

Переходя к пределу в очевидном неравенстве

$$\| \varphi_0 - f \|_{\alpha_i} \leqslant \| \varphi_{\alpha_i}^* - f \|_{\alpha_i} + \| \varphi_0 - \varphi_{\alpha_i}^* \|_\beta = m_{\alpha_i}[\Omega] + 0(1),$$

найдем, что

$$\lim_{\alpha \to \beta} m_\alpha[\Omega] \geqslant \| \varphi_0 - f \|_\beta \geqslant m_\beta[\Omega],$$

откуда, с учетом (19), вытекает

$$\lim_{\alpha \to \beta} m_\alpha[\Omega] = m_\beta[\Omega]$$

$$\text{и } \| \varphi_0 - f \|_\beta = m_\beta[\Omega], \text{ т. е. } \varphi_0 \in e_\beta[\Omega].$$

В случае задачи II рассуждение еще проще, ибо тогда из неравенства

$$\| \Phi_\beta^* - f \|_\alpha \leqslant M_\alpha[\Omega] = \| \Phi_\alpha^* - f \|_\alpha \leqslant \| \Phi_\alpha^* - f \|_\beta \leqslant M_\beta[\Omega]$$

по принципу сжатой переменной сразу получим

$$\lim_{\alpha \to \beta} M_\alpha[\Omega] = M_\beta[\Omega].$$

Аналогично предыдущему, для каждого элемента $\Phi_0 \in H^*[\Omega]$ можно

---

* Другое доказательство, опирающееся на геометрические критерии (3), (4), можно провести в духе теорем 21—22 работы автора [9].

найти последовательность

$$\Phi^*_{\alpha_i} \xrightarrow[(\beta)]{} \Phi_0,$$

где $\alpha_i \to \beta$ при $i \to \infty$. Предельный переход в неравенстве

$$M_{\alpha_i}[\Omega] = \| \Phi^*_{\alpha_i} - f \|_{\alpha_i} \leqslant \| \Phi_0 - f \|_\beta + \| \Phi^*_{\alpha_i} - \Phi_0 \|_\beta$$

приводит к

$$\| \Phi_0 - f \|_\beta \geqslant M_\beta[\Omega] = \max_{\varphi \in \Omega} \| \varphi - f \|_\beta,$$

откуда $\| \Phi_0 - f \|_\beta = M_\beta[\Omega]$, т. е. $\Phi_0 \in E_\beta[\Omega]$.

Теорема доказана полностью.

Из первой части доказательства видно, что в случае одной лишь задачи I утверждение теоремы 2 остается в силе при более слабом предположении локальной компактности и замкнутости Ω в метрике $X^{(\beta)}$. Например, для шкалы пространств C_{L_p} $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ при $\Omega \equiv X_n$ отсюда получаются известные результаты Д. Пойа [10], Д. Джексона [11], Г. Жюлиа [12], реализация которых осуществлена в вычислительном α-алгорифме последовательных взвешенных приближений Е. Я. Ремеза ([6], гл. V).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, ОНТИ, 1937.
2. А. Л. Гаркави, Теоремы двойственности для приближений посредством элементов выпуклых множеств, УМН, т. XVI, вып. 4 (100), 1961, 141—145.
3. Е. Г. Гольштейн, Об одном бесконечномерном аналоге задачи линейного программирования и его приложениях к некоторым вопросам теории приближений, ДАН СССР, т. 140, № 1, 1961, 23—26.
4. Л. В. Канторович и Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1959.
5. Б. С. Митягин, Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах, УМН, т. XVI, вып. 4 (100), 1961, 63—132.
6. Е. Я. Ремез, Общие вычислительные методы чебышевского приближения, Изд-во АН УССР, К., 1957.
7. Б. А. Рымаренко, В. Н. Буров, О некоторых условно-экстремальных задачах чебышевского приближения в вещественной области, Тр. IV Всесоюзн. матем. съезда, т. II, 680—683.
8. В. Н. Буров, Об экстремальных свойствах коэффициентов полинома наилучшего равномерного приближения, Сб. «Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций», Физматгиз, М., 1961, 20—26.
9. В. Н. Буров, Аппроксимация со связями в линейных нормированных пространствах, УМЖ, т. XV, № 1—2, 1963.
10. G. Polya, Sur un algorithme toujours convergent pour obtenir les polynomes de meilleure approximation de Tchebychef pour une fonction continue quelconque, Comp. Ren. Acad. sci., Paris, 157, 1913, 840—843.
11. D. Jackson, On functions of closest approximation, Trans. Amer. Math. Soc., 22, № 1, 1921, 117—128.
12. G. Julia, Sur les polynomes re Tchebychef, Comp. Ren. Acad. sci., Pasis, 182, 1926, 1201—1202, 1455.

Поступила 4.I 1964 г.
Ленинград