Интегральное представление решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений

М. Н. Кривцова

Известно, что подстановками Брио и Буке общее уравнение $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ во многих случаях может быть приведено к виду

$$\frac{dy}{dx} = y^m F(x, y).$$

В настоящей работе исследуется уравнение

$$\frac{d\varrho}{d\theta} = \varrho^2 \varphi(\varrho, \theta), \tag{1}$$

т. е. рассмотрен случай $m = 2$.

Здесь $\varphi(\varrho, \theta)$ — либо полином, либо рациональная функция относительно ϱ с коэффициентами, дифференцируемыми по θ в интервале $(-\infty, +\infty)$.

В работе обосновывается интегральное представление и новый метод приближенного построения решения.

Решение поставленной задачи начнем с исследования вспомогательного уравнения

$$\frac{d\varrho}{d\theta} = \varrho^2 \varphi(\varrho), \tag{2}$$

где $\varphi(\varrho)$ — полином степени n с вещественными коэффициентами.

Относительно полинома $\varphi(\varrho)$ предположим пока следующее:

1) $\varphi(0) > 0$;
2) $\varphi'(0) < 0$;
3) кратных корней у полинома нет.

Уравнение (2) — уравнение с разделяющимися переменными и легко интегрируется. Положим $\omega = \mu e^{\frac{-\varphi^2(0)}{\varphi'(0)}\theta}$, где μ — комплексный параметр. Тогда

$$\omega = e^{\frac{\beta_0}{\varrho}} \varrho \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\varrho}{a_k}\right)^{\beta_k} = F(\varrho); \tag{3}$$

здесь $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — корни полинома $\varphi(\varrho)$, $\beta_0 = \frac{-\varphi(0)}{\varphi'(0)}$,

$$\beta_k = \frac{-\varphi^2(0)}{a_k^2 \varphi'(a_k)\varphi'(0)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Функция $F(\varrho)$ многозначная и смысл уравнения (3) будет уточнен позже.

С помощью теоремы о вычетах легко доказать, что $\sum_{k=1}^{n} \beta_k = -1$.

Будем искать интегральное представление для определенного решения уравнения (2), которое назовем главным.

Определение. Главным решением уравнения (2) называется решение $\varrho(\omega)$, определяемое из равенства (3) и нормированное условием $\arg \varrho = 0$ при $\arg \omega = 0$.

Для обоснования интегрального представления воспользуемся теоремой из [1] гл. VI, § 59.

Теорема 1. *Пусть в дифференциальном уравнении* (2) *полином* $\varphi(\varrho)$ *удовлетворяет условиям:*

1) *коэффициенты полинома — действительные числа, причем* $\varphi(0) > 0$ и $\varphi'(0) < 0$;

2) *все корни полинома простые*;

3) *существует хотя бы один положительный корень* a_1;

4) *отрицательных корней у полинома нет*;

5) *выполняется неравенство*

$$\frac{1}{2} < \left|\sum \beta_{k_m}\right| \leqslant 1,$$

где $\beta_{k_m} = \dfrac{-\varphi^2(0)}{a_{k_m}^2 \varphi'(a_{k_m})\varphi'(0)}$, *а сумма соответствует всем положительным корням полинома и любой комбинации попарно сопряженных комплексных корней, имеющих положительную вещественную часть;*

6) $\operatorname{Re}\varphi(\varrho)\big|_{x=0} \neq 0$.

Тогда главное решение уравнения (2) *представимо в форме*

$$\varrho(\omega') = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + \omega'}{e^{it} - \omega'}\, d\sigma(t),$$

где

$$\omega' = \frac{\mu e^{\frac{-\varphi^2(0)}{\varphi'(0)}\theta} - 1}{\mu e^{\frac{-\varphi^2(0)}{\varphi'(0)}\theta} + 1},$$

а $\sigma(t)$ — *неубывающая функция с ограниченной вариацией на сегменте* $[0, 2\pi]$.

Доказательство. От уравнения (2) перейдем к системе двух вещественных уравнений; положим $\varrho = x + iy$, $\varphi(\varrho) = U + iV$. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} = (x^2 - y^2)U - 2xyV, \\[2mm] \dfrac{dy}{d\theta} = 2xyU + (x^2 - y^2)V. \end{cases} \tag{4}$$

Изучим расположение интегральных кривых системы (4) согласно известному способу [2], вблизи точки (0, 0) и точки $(a_1, 0)$. Получим, что точка (0, 0) — диполь, точка $(a_1, 0)$ — узел. Докажем, что существуют интегральные кривые системы (4), которые выходят из точки (0, 0), касаясь вещественной оси, и входят в точку $(a_1, 0)$, не заходя в левую полуплоскость.

Действительно, если бы какая-нибудь из интегральных кривых системы (4), выходящая из точки (0, 0) и входящая в точку $(a_1, 0)$, заходила в левую полуплоскость, то нашлась бы другая кривая этого типа, которая касалась бы оси ординат в конечной точке. Для нее было бы

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{V}{U}\right|_{x=0} = \infty.$$

Однако это невозможно, так как $U\big|_{x=0} \neq 0$. Кривые, выходящие из (0, 0) и входящие в $(a_1, 0)$, заполняют некоторую область G, ограниченную барьерными линиями L_{α_0} и $L_{-\alpha_0}$ (рис. 1).

Вернемся к равенству (3). Функция $F(\varrho)$ многозначная, но в области G определяется однозначная ветвь этой функции, если потребовать, чтобы $\arg F(\varrho) = 0$ при $\arg\varrho = 0$, так как область G не содержит особых точек.

Обозначим эту ветвь функции $F(\varrho)$ через $F_{гл}(\varrho)$. Тогда главное решение уравнения (2) получим, определив $\varrho(\omega)$ из уравнения $\omega = F_{гл}(\varrho)$, полагая $\arg\varrho = 0$ при $\arg\omega = 0$. Исследуем аналитические свойства главного решения. Заметим, что лучу $\arg\omega = \alpha$ соответствует интегральная кривая системы (4).

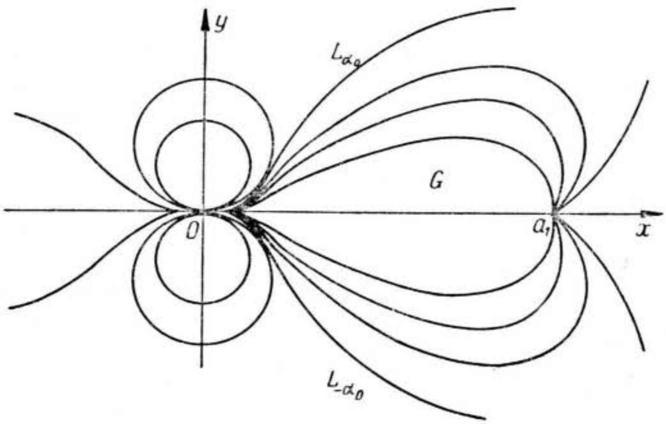

Рис. 1.

Барьерные линии L_{α_0} и $L_{-\alpha_0}$ соответствуют лучам $\arg\omega = \alpha_0$ и $\arg\omega = -\alpha_0$ и уходят в бесконечность.

Выше было обозначено $\omega = \mu e^{\frac{-\varphi^2(0)}{\varphi'(0)}\theta}$. Из уравнения (2) находим

$$\int \frac{d\varrho}{\varrho^2\varphi(\varrho)} = \theta + \ln C;$$

значит

$$\omega = C_1 e^{\frac{-\varphi^2(0)}{\varphi'(0)}\int\frac{d\varrho}{\varrho^2\varphi(\varrho)}}.$$

Пользуясь этим равенством, найдем приращение $\arg\omega$ вдоль линии L_{α_0}, дуги M_1N_1 и линии $L_{-\alpha_0}$ (рис. 2). Получим $\Delta\arg\omega = -2\alpha_0$. С другой стороны,

$$\Delta\arg\omega = \operatorname{Im}\frac{-\varphi^2(0)}{\varphi'(0)}\int\frac{d\varrho}{\varrho^2\varphi(\varrho)},$$

где интеграл взят по пути L_{α_0}, дуге M_1N_1, $L_{-\alpha_0}$. Пользуясь теоремой о вычетах, получим для этого интеграла

$$\frac{-\varphi^2(0)}{\varphi'(0)}\int\frac{d\varrho}{\varrho^2\varphi(\varrho)} = 2\pi i\sum\beta_{k_m}.$$

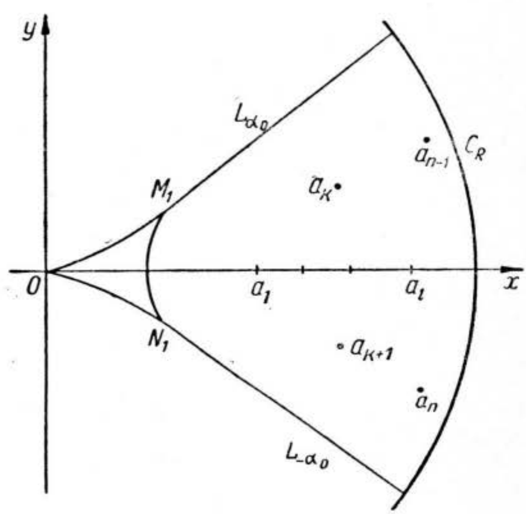

Рис. 2.

Сумма соответствует всем положительным корням полинома $\varphi(\varrho)$ и тем комплексным корням, которые расположены внутри контура интегрирования. Контур интегрирования дополняем до замкнутого дугой окружности (C_R). Устремляя R к бесконечности, легко получим, что интеграл по этой дуге стремится к нулю.

Значит, принимая во внимание, что $-2\alpha_0 = 2\pi i \Sigma \beta_{k_m}$ и пятое условие теоремы, найдем

$$\frac{\pi}{2} < \alpha_0 \leqslant \pi.$$

Отсюда следует, что интегральные кривые системы (4), отвечающие условию $-\frac{\pi}{2} < \arg \omega < \frac{\pi}{2}$, остаются в конечной части плоскости. Это означает, что главное решение $\varrho(\omega)$ — аналитическая и ограниченная функция в полуплоскости $\operatorname{Re}\omega > 0$. Кроме того, $\operatorname{Re}\varrho(\omega) > 0$ в той же полуплоскости. Перейдя от полуплоскости $\operatorname{Re}\omega > 0$ к единичному кругу по формуле $\omega' = \frac{\omega - 1}{\omega + 1}$ и воспользовавшись теоремой [1], получим для главного решения интегральное представление

$$\varrho(\omega') = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + \omega'}{e^{it} - \omega'} d\sigma(t).$$

Теорема доказана.

Теперь перейдем к исследованию основного уравнения

$$\frac{d\varrho}{d\theta} = \varrho^2 \varphi(\varrho, \theta).$$

Найдем интегральное представление главного решения. Главное решение уравнения (1) определим в процессе доказательства теоремы 2.

Т е о р е м а 2. *Пусть в дифференциальном уравнении* (1) *полином* $\varphi(\varrho, \theta)$ *удовлетворяет условиям:*

1) *коэффициенты полинома* $\varphi(\varrho, \theta)$ — *действительные, дифференцируемые в интервале* $(-\infty, +\infty)$ *функции от* θ; *причем* $\varphi(0, \theta) > 0$ *и* $\varphi'_\varrho(0, \theta) < 0$;

2) *все корни простые;*

3) *существует хотя бы один положительный корень* $a_1(\theta)$, *монотонно возрастающий с ростом* θ *и ограниченный в интервале* $(-\infty, +\infty)$;

4) *отрицательных корней полином не имеет;*

5) *выполняется неравенство*

$$\frac{1}{2} < \left| \sum \beta_{k_m} \right| \leqslant 1$$

где

$$\beta_{k_m} = \frac{-\varphi^2(0, \theta)}{a_{k_m}^2(\theta) \cdot \varphi'_\varrho[a_{k_m}(\theta), \theta]\, \varphi'_\varrho(0, \theta)}$$

и сумма соответствует всем положительным корням полинома $\varphi(\varrho, \theta)$ *и любой комбинации попарно сопряженных комплексных корней, имеющих положительную вещественную часть;*

6) $\operatorname{Re}\varphi(\varrho, \theta)|_{x=0} \neq 0$;

7) $$I = \int_t^\infty \varphi(0, \theta)\, \beta_0(\theta) \frac{UV'_\theta - VU'_\theta}{U^2 + V^2} d\theta$$

не меняет знака при всех t *из интервала* $(-\infty, +\infty)$ *и всех* (x, y) *из первого квадранта, причем* U *и* V *определены условием* $\varrho^2\varphi(\varrho, \theta) = U + iV$.

Тогда главное решение уравнения (1) *при всех* θ *представимо в форме*

$$\varrho(\mu, \theta) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + \omega_0'}{e^{it} - \omega_0'}\, d\sigma(t, \theta), \tag{5}$$

где

$$\omega_0' = \frac{\mu e^{-\varphi(0, \theta_0)\beta_0(\theta_0)\theta} - 1}{\mu e^{-\varphi(0, \theta_0)\beta_0(\theta_0)\theta} + 1}.$$

$\sigma(t, \theta)$ — *неубывающая функция* t *с ограниченной вариацией на* $[0, 2\pi]$.

Доказательство. Пусть $[\theta_0, \theta]$ — фиксированный сегмент. Разобьем его на n частей. Рассмотрим первый частичный сегмент $[\theta_0, \theta_1]$ и интегральную кривую главного решения уравнения $\frac{d\varrho}{d\theta} = \varrho^2\varphi(\varrho, \theta_0)$, соответствующую значению параметра μ. Применяя известный метод «склеивания» решений, перейдем от сегмента $[\theta_0, \theta_1]$ к сегменту $[\theta_1, \theta_2]$ и т. д. На стыке соседних сегментов «склеиваем» интегральные кривые главных решений уравнений, соответствующих этим сегментам. Перейдем к пределу при $n \to \infty$. Тогда построенная «склеенная» ломаная стремится к интегральной кривой уравнения (1). Совокупность этих кривых при любых μ и образует главное решение уравнения (1). Вдоль указанной выше ломаной получим

$$\varrho(\mu, \theta) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + \omega_0'}{e^{it} - \omega_0'}\, d\sigma_n(t, \theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n = \theta),$$

т. е. уравнение ломаной имеет форму интеграла Стилтьеса. Используя теорему Хелли [3], переходим к пределу под знаком интеграла Стилтьеса и получаем интегральное представление (5) главного решения уравнения (1).

Замечание. В процессе доказательства выясняется, что для возможности «склеивания» интегральных кривых, отвечающих соседним сегментам, достаточно, чтобы полином $\varphi(\varrho, \theta)$ правильно зависел от θ.

Определение. Полином $\varphi(\varrho, \theta)$ правильно зависит от θ, если при любых $\bar\theta$ и $\bar{\bar\theta}$, где $\bar\theta < \bar{\bar\theta}$, область $G_{\bar\theta}$ есть часть области $G_{\bar{\bar\theta}}$.

Здесь $G_{\bar\theta}$ — область значений главного решения уравнения $\frac{d\varrho}{d\theta} = \varrho^2\varphi(\varrho, \bar\theta)$, а область $G_{\bar{\bar\theta}}$ — область значений главного решения уравнения $\frac{d\varrho}{d\theta} = \varrho^2\varphi(\varrho, \bar{\bar\theta})$ (см. рис. 1).

Можно доказать, что правильная зависимость будет иметь место при выполнении условия 7) теоремы 2. Однако объем статьи не позволяет привести это доказательство.

Для вещественных значений ω_0' формула (5) упрощается и принимает вид

$$\varrho(\mu, \theta) = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \int_{-1}^{1} \frac{d\sigma(\tau, \theta)}{\frac{1}{\xi} - \tau}, \tag{6}$$

где

$$\xi = \frac{2\omega_0'}{1 + \omega_0'^2}; \qquad \tau = \cos t.$$

Новая переменная ξ зависит от μ и θ.

В статье А. А. Маркова [5] доказано, что если функция представлена интегралом вида (6), то можно построить непрерывную дробь, которая будет сходиться к этой функции, причем подходящие дроби четного и нечетного порядка будут расположены соответственно ниже и выше графика функции.

Такое расположение приближений — подходящих дробей — дает простой способ оценки погрешности приближения. Коэффициенты непрерывной дроби определяются по известным формулам [4] через коэффициенты некоторого ряда. Для нахождения коэффициентов этого ряда получены несложные рекуррентные соотношения, зависящие от коэффициентов полинома $\varphi(\varrho, \theta)$ и некоторого коэффициента v_1, который может быть взят произвольно из интервала $(0, a_1(\theta))$. Точность решения не зависит от выбора этого коэффициента.

Замечание. *Можно доказать, что при некоторых дополнительных* условиях полученные результаты легко переносятся на уравнение $\frac{d\varrho}{d\theta} = \varrho^2\varphi(\varrho, \theta)$, где $\varphi(\varrho, \theta)$ — рациональная функция.

Кроме того, все это исследование можно перенести на уравнение Брио и Буке при $m > 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман, Теория линейных операторов, гл. VI, § 59, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
2. В. В. Немыцкий и В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, гл. I, § 4, Гостехиздат, М.—Л., 1947.
3. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 5, гл. I, п. 12, Гостехиздат, М., 1959.
4. Т. И. Стилтьес, Исследование о непрерывных дробях, Гостехиздат Украины, Харьков—Киев, 1936.
5. А. А. Марков, Избранные труды, Гостехиздат, М.—Л., 1948.

Поступила 3.VIII 1962 г.
Одесса