О представлении положительно определенных матриц по собственным функциям разностных операторов

Чан Чанг

В заметке на основании методики, развитой Ю. М. Березанским [1, 2], доказывается ряд теорем об интегральных представлениях положительно определенных матриц. Эти теоремы уточняют и обобщают соответствующие результаты Н. Н. Чауса [3].

1. Единственность решения задачи Коши для обыкновенного разностного выражения. Пусть имеется разностное выражение порядка r, действующее на последовательности $u = (\ldots, u_{-1}, u_0, u_1, \ldots)$ следующим образом:

$$(Lu)_j = \sum_{\alpha=-r^-}^{r^+} a_{j,\alpha} u_{j+\alpha}, \tag{1}$$

где $r = r^- + r^+$ — фиксированное разложение r на неотрицательные целые числа, а $a_{j,\alpha}$ — комплексные коэффициенты, причем $a_{j,-r^-} \neq 0$, $a_{j,r^+} \neq 0$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = Lu(t) \quad u(0) = u^0, \tag{2}$$

где $u(t) = (\ldots, u_{-1}(t), u_0(t), \quad u_1(t), \ldots) = \{u_j(t)\}$, а $t \in [0, T]$. Обозначим $p = \max(r^-, r^+)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Предполагается, что* $|a_{j,\alpha}| \leqslant A_{|j|}$, *где* $A_n (n \geqslant 0)$ — *неубывающая положительная последовательность и* $A_0 \geqslant 1$. *Пусть* $m_n (n \geqslant 0)$ — *неубывающая положительная последовательность, для которой класс* $C_{<M_n>}$, *где* $M_n = A_{np}^n m_{np}$ *квазианалитический* [4].

Тогда решение задачи (2), *удовлетворяющее условию*

$$|u_j(t)| \leqslant Cq^{|j|} m_{|j|} \quad (j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots) \tag{3}$$

при $t \in [0, T]$ (C *и* q — *произвольные постоянные* > 1), *единственно.*

Доказательство. Пусть $u(t) = \{u_j(t)\}$ $(j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ — решение задачи (2), удовлетворяющее условию (3) и $u_j^0 = u_j(0) = 0$. Очевидно, $u_j(t)$ бесконечно дифференцируема и

$$\frac{d^n u_j(t)}{dt} = \sum_{\alpha_1=-r^-}^{r^+} a_{j,\alpha_1} \sum_{\alpha_2=-r^-}^{r^+} a_{j+\alpha_1,\alpha_2} \ldots \sum_{\alpha_n=-r^-}^{r^+} a_{j+\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n} u_{j+\alpha_1+\ldots+\alpha_n}(t).$$

Поэтому $u_j^{(n)}(0) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Найдем оценку для $u_j^{(n)}(t)$:

$$|u_j^{(n)}(t)| \leqslant Cq^{|j|+np}(r+1)^n A_{|j|} A_{|j|+p} \ldots A_{|j|+(n-1)p} m_{|j|+np} \leqslant$$
$$\leqslant Cq^{|j|}[(r+1)q^p]^n A_{|j|+np}^n m_{|j|+np}.$$

Для фиксированного j можно найти целое число k, для которого $|j| \leqslant kp$. Поэтому

$$|u_j^{(n)}(t)| \leqslant C_1 B^n A_{(k+n)p}^{k+n} m_{(k+n)p} = C_1 B^n M_{k+n} = C_1 B^n M'_n,$$

и, значит, $u_j(t) \in C_{<M'_n>}$, где класс $C_{<M'_n>}$ квазианалитический вместе с $C_{<M_n>}$. Так как $u_j^{(n)}(0) = 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$, то $u_j(t) \equiv 0$. Теорема доказана.

Аналогичная теорема с аналогичным доказательством получается в случае «полуоси», т. е. в том случае, когда $u = (u_0, u_1, \ldots) = \{u_j\}$ $(j=0, 1, \ldots)$. Здесь при подсчете $(Lu)_j$ для $j = 0, 1, \ldots, r^- - 1$ полагаем $u_{-r^-} = \ldots = u_{-1} = 0$.

Теорема 2. *В случае «полуоси» решение задачи* (2), *удовлетворяющее условию* (3), *единственно, если последовательность* $M_n = A^n_{nr^+} m_{nr^+}$ *такая, что класс* $C_{<M_n>}$ *квазианалитический.*

2. Критерий единственности представления положительно определенных матриц. Бесконечная матрица $K = \| K_{jk} \|_{-\infty}^{\infty}$ называется положительно определенной (п. о.), если для любой финитной последовательности $u = (\ldots, u_{-1}, u_0, u_1, \ldots) = \{u_j\}$ $(j = \ldots -1, 0, \ldots)$

$$\sum_{j,k=-\infty}^{\infty} K_{jk} u_k \bar{u}_j \geqslant 0.$$

Подберем последовательность $\{\varrho_j\}$, $\varrho_j \geqslant 1$ $(j = \ldots -1, 0, 1, \ldots)$ так, чтобы

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{K_{jj}}{\varrho_j} < \infty.$$

Будем считать $H_0 = l_2(-\infty, \infty)$, $H_+ = l_2((-\infty, \infty), \varrho_j)$. Тогда $K \in H_- \otimes \otimes H_-^*$. Введем в H_+ скалярное произведение, полагая

$$<u, v> = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} K_{jk} u_k \bar{v}_j.$$

Производя отождествление по $<. , .>$ и затем пополнение, получим гильбертово пространство H_k.

Обозначим через $\chi_{0;j}(\lambda), \ldots, \chi_{r-1;j}(\lambda)$ $(j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ фундаментальную систему решений уравнения $Lu = \lambda u$, удовлетворяющих следующим условиям, заданным в r точках $a - r^-, \ldots, a + r^+ - 1$, где a — целое фиксированное:

$$\chi_{\alpha;j}(\lambda) = \delta_{j;\alpha+a-r^-} \quad (j = a - r^-, \ldots, a + r^+ - 1;\ \alpha = 0, \ldots, r-1).$$

Как показано в [2], п. о. матрица K при условии

$$L_j K = \bar{L}_k K \tag{4}$$

имеет представление

$$K_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha,\beta=0}^{r-1} \chi_{\alpha;j}(\lambda) \overline{\chi_{\beta;k}(\lambda)}\, d\varrho_{\alpha\beta}(\lambda) \tag{5}$$

с некоторой неубывающей матричной функцией распределения $\| \varrho_{\alpha\beta}(\lambda) \|_0^{r-1}$. Матрица $\| d\varrho_{\alpha\beta}(\lambda) \|_0^{r-1}$ определяется при этом однозначно тогда и только тогда, когда замыкание в H_k оператора $u \to \bar{L}^+ u$, $u \in l_{2,0}(-\infty, \infty)$ максимально. Этот факт дает нам возможность с помощью теоремы 1 получить следующий критерий единственности представления (5).

Теорема 3. *Пусть L — разностное выражение* (1), $K = \| K_{jk} \|_{-\infty}^{\infty}$ — *п. о. матрица, удовлетворяющая условию* (4), *так что имеет место представление* (5). *Для однозначности матрицы* $\| d\varrho_{\alpha\beta}(\lambda) \|_0^{r-1}$ *в представлении* (5) *достаточно, чтобы выполнялась оценка*

$$| K_{jk} | \leqslant C q^{|j|+|k|} m_{|j|} m_{|k|}, \tag{6}$$

* Автор пользуется терминологией из [2].

где C, q — *произвольные положительные константы, а* m_n $(n \geqslant 0)$ — *последовательность, удовлетворяющая условиям, указанным в теореме* 1.

Для доказательства теоремы понадобится следующая лемма.

Лемма. *Пусть* m_n — *последовательность такая, что* $m'_n = \sqrt{m_n}$, *удовлетворяет условиям, указанным в теореме 1 для* m_n. *Тогда задача Коши для уравнения* $\frac{du(t)}{dt} = (\xi L^+)^* u(t)$, *где* ξ — *фиксированное комплексное число,* L^+ — *формально сопряженное выражение к* L, *а* $t \in [0, \infty)$, *может иметь только одно слабое решение в пространстве* $H = l_2(-\infty, \infty), m_{|j|})$.

Доказательство. По определению слабо дифференцируемая вектор-функция $u(t) = \{u_j(t)\}$ $(j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots;\ t \in [0, \infty))$ со значениями в H будет слабым решением уравнения $\frac{du(t)}{dt} = (\xi L^+)^* u(t)$, если для любого $f \in D(\xi L^+)$ выполняется равенство

$$\left(\frac{du(t)}{dt}, f\right)_H = (u(t), (\xi L^+) f)_H. \tag{7}$$

В качестве f можно взять δ_k, где $k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ Так как

$$L^+\delta_k = \sum_{\alpha=-r^-}^{r^+} \overline{a_{k,\alpha}}\delta_{k+\alpha},$$

то равенство (7) примет вид

$$m_{|k|}\frac{du_k(t)}{dt} = \overline{\xi} \sum_{\alpha=-r^-}^{r^+} a_{k,\alpha} m_{|k+\alpha|} u_{k+\alpha}(t).$$

Полагая $m_{|k|}u_k(t) = v_k(t)$, $v(t) = \{v_j(t)\}$, получим уравнение

$$\frac{dv(t)}{dt} = \overline{\xi} L v(t). \tag{8}$$

Значения вектор-функции $v(t)$ будут принадлежать $l_2((-\infty, \infty), m_{|j|}^{-1})$, т. е. при каждом $t \in [0, \infty)$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{|v_j(t)|^2}{m_{|j|}} = c(t) < \infty.$$

Так как $u(t)$ слабо дифференцируема, то она ограничена при $t \in [0, T]$, где $T > 0$ любое. Следовательно, $c(t) = \| u(t) \|^2 \leqslant C_T$ при $t \in [0, T]$. Итак, слабое решение рассматриваемой задачи Коши единственно, если единственно решение задачи Коши для уравнения (8) в классе вектор-функций $v = (t) = \{v_j(t)\}$ таких, что $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{|v_j(t)|^2}{m_{|j|}} \leqslant C_T < \infty$, а тем более, если единственно решение последней задачи в классе вектор-функкий $v(t)$, для которых $|v_j(t)| \leqslant C_T^{1/2}\sqrt{m_{|j|}}$. Но эта единственность будет иметь место по теореме 1.

Переходим к доказательству теоремы 3. Для этого достаточно доказать максимальность замыкания в H_K оператора $u \to \overline{L}^+ u$, $u \in l_{2,0}(-\infty, \infty)$, где п. о. K удовлетворяет условию (6). Положим $H_+ = l_2((-\infty, \infty), \varrho_j)$, где $\varrho_j = q^{|j|} m_{|j|}^2$. Тогда, с одной стороны, согласно лемме, для обоих уравнений $\frac{du(t)}{dt} = \pm (i\overline{L}^+)^* u(t)$ $(t \in (0, \infty))$ справедлива единственность в H_+ слабых решений задачи Коши, а с другой стороны, $K \in H_- \otimes H_-$, где H_- определяется по $H_+ = l_2((-\infty, \infty), \varrho_j)$ и $H_0 = l_2(-\infty, \infty)$. Отсюда по теореме 3 [1] замыкание в H_K оператора $u \to L^+u$; $u \in l_{2,0}(-\infty, \infty)$ максимально.

Замечание. Аналогичные результаты получаются в случае «полуоси», если при подсчете $(L^+u)_j$ для $j = 0, \ldots, r^+ - 1$ брать $u_{-r^+} = \ldots = u_{-1} = 0$. Отличие будет в том, что m_n ($\sqrt{m_n}$) удовлетворяет условиям, указанным не в теореме 1, а в теореме 2.

В качестве примера приведем следующий известный критерий определенности классической степенной проблемы моментов, который получается на основании доказанных общих теорем.

Проблема моментов $\{S_n\}$ определенная, если $\sqrt{s_{2j}} \leqslant Cq^j m_j$ где m_j — неубывающая последовательность такая, что класс $C\langle m_j \rangle$ квазианалитический.

3. Единственность представления п. о. матриц (случай n разностных операторов). Обозначим через G множество целочисленных точек $j = (j_1, \ldots, j_n)$ пространства E_n, где $j_1, \ldots, j_l$ $(0 \leqslant l \leqslant n)$ меняются по всей оси: $(\ldots, -1, 0, 1, \ldots)$, а $j_{l+1}, \ldots, j_n$ — по полуоси $(0, 1, \ldots)$.

Матрица $K = \| K_{jk} \|_{j,k \in G}$ называется п. о., если для любой финитной последовательности $\{u_j\}$ $\sum\limits_{j,k \in G} K_{jk} u_k \bar{u}_j \geqslant 0$. Подберем такую последовательность $\varrho_j \geqslant 1$ $(j \in G)$, чтобы $\displaystyle\sum_{j \in G} \frac{K_{jj}}{\varrho_j} < \infty$. Если положить $H_0 = l_2(G)$, $H_+ = l_2(G, \varrho_j)$, то $K \in H_- \otimes H_-$. Пространство H_K совпадает с пополнением H_+ по скалярному произведению $\langle u, v \rangle = \sum\limits_{j,k \in G} K_{jk} u_k \bar{v}_j$. Рассмотрим n разностных выражений, действующих на последовательности $u = \{u_j\}$ $(j \in G)$ по формуле

$$(L^{(s)}u)_j = \sum_{\alpha_s = -r_s^-}^{r_s^+} a_{j_s, \alpha_s}^{(s)} u_{j_1, \ldots, j_{s-1}, j_s + \alpha_s, j_{s+1}, \ldots, j_n}, \tag{9}$$

где r_s^-, $r_s^+ \geqslant 0$, $r_s = r_s^- + r_s^+$, $a_{j_s - r_s^-}^{(s)}$ и $a_{j_s + r_s^+}^{(s)} \neq 0$, $s = 1, \ldots, n$ (т. е. по переменной j_s $L^{(s)}$ имеет вид (1)).

Из n фундаментальных систем решений $\chi_{\alpha_s; j_s}(\lambda_s)$ уравнений $L^{(s)}u = \lambda_s u$ составим произведение

$$\chi_{\alpha; j}(\lambda) = \chi_{\alpha_1; j_1}(\lambda_1) \ldots \chi_{\alpha_n; j_n}(\lambda) \quad (j \in G,\ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in E_n),$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ меняется по параллелепипеду A точек:

$$\alpha_1 = 0, \ldots, r_1 - 1;\ \ldots;\ \alpha_l = 0, \ldots, r_l - 1;\ \alpha_{l+1} = r_{l+1}^-, \ldots, r_{l+1}^- - 1;\ \ldots;$$
$$\alpha_n = r_n^-, \ldots, r_n - 1.$$

Известно [2], что для существования представления

$$K_{jk} = \int\limits_{E_n} \sum_{\alpha, \beta \in A} \chi_{\alpha, j}(\lambda) \overline{\chi_{\beta, k}(\lambda)} \, d\varrho_{\alpha\beta}(\lambda) \tag{10}$$

с п. о. матрицей $\| d\varrho_{\alpha\beta}(\lambda) \|_{\alpha, \beta \in A}$ необходимо и достаточно выполнения двух требований: а) равенства

$$L_{j_s}^{(s)} K = \overline{L_{k_s}^{(s)}} K, \tag{11}$$

б) чтобы n эрмитовых операторов в H_K $u \to L^{(s)+}u$, $u \in l_{2,0}(G)$ допускали расширения в H_K или с выходом в более широкое пространство до системы коммутирующих самосопряженных операторов. Матрица $\| d\varrho_{\alpha\beta}(\lambda) \|_{\alpha,\beta\in A}$ определяется здесь однозначно тогда и только тогда, когда у операторов $u \to \overline{L}^{+}u$, $u \in l_{2,0}(G)$ существует лишь одно n-мерное обобщенное разложение единицы.

Этот результат дает возможность доказать с помощью теорем 1 — 3 [1] теорему, аналогичную теореме 3.

Теорема 4. *Пусть п.о. матрица* $K = \| K_{jk} \|_{j,k\in G}$ *удовлетворяет соотношениям* (11) *с разностными выражениями* (9), *в которых* $|\alpha^{(s)}_{j_s,\alpha_s}| \leqslant A^{(s)}_{|j_s|}$, *где* $A^{(s)}_n$ $(n \geqslant 0)$ — *неубывающая положительная последовательность. Для того чтобы матрица* $\| d\varrho_{\alpha\beta}(\lambda) \|_{\alpha\beta\in A}$ *в представлении* (10) *определялась однозначно, достаточно выполнения следующей оценки*

$$| K_{j_1,\ldots,j_n;\, k_1,\ldots,k_n} | \leqslant Cq^{|j_1|+\cdots+|j_n|+|k_1|+\cdots+|k_n|}\, m^{(1)}_{|j_1|} \ldots m^{(n)}_{|j_n|} m^{(1)}_{|k_1|} \ldots m^{(n)}_{|k_n|},$$

где $m^{(s)}_n$ $(n \geqslant 0)$ *удовлетворяют для* $L^{(s)}$ *условиям, указанным в теореме* 1 *при* $s \leqslant l$ *и условиям теоремы* 2 *при* $s > l$.

4. Единственность решения задачи для выражения в частных разностях. Обозначим через G_2 совокупность всех целочисленных точек E_2. Пусть $P \subset G_2$ — любое конечное множество, состоящее из точек $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ и обладающее следующим свойством: $\min\limits_{P} \alpha_1 = -\overline{r}_1$ достигается в одной точке. Такое же ограничение предполагается и для $\max\limits_{P} \alpha_1 = r_1^{+}$. Обозначим по аналогии $-r_2^{-} = \min\limits_{P} \alpha_2$ и $r_2^{+} = \max\limits_{P} \alpha_2$ и будем считать $r_i^{-}, r_i^{+} \geqslant 0$ $(i = 1, 2)$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = Lu(t) \quad u(0) = u^0, \tag{12}$$

где $u(t) = \{u_j(t)\}_{j\in G_2}$, $t \in [0, T]$, а

$$(Lu)_j = \sum_{\alpha\in P} a_{j,\alpha} u_{j+\alpha}. \tag{13}$$

Обозначим $p_i = \max(r_i^{-}, r_i^{+})$ $(i = 1, 2)$, $p = (p_1, p_2)$. Последовательность Q_j $(j \in G_2)$ называется неубывающей, если $Q_{j+\beta} \geqslant Q_j$, кода $\beta_1, \beta_2 \geqslant 0$, где $(\beta_1, \beta_2) = \beta \in G_2$.

Предположим, что $|a_{j,\alpha}| \leqslant A_{|j|}$, где $j \in G_2$, $\alpha \in P$, а A_k $(k = (k_1, k_2)$, $k_1, k_2 \geqslant 0)$ — неубывающая положительная последовательность. Тогда справедлива теорема, аналогичная теореме 1.

Теорема 5. *Пусть имеется неубывающая положительная последовательность* m_k $(k = (k_1, k_2)$, $k_1, k_2 \geqslant 0)$ *такая, что класс* $C_{<M_n>}$, *где* $M_n = A^n_{np} m_{np}$ $(n \geqslant 0$, $np = (np_1, np_2)$, *квазианалитический.*

Тогда решение задачи (12), *удовлетворяющее условию* $|u_j(t)| \leqslant Cq^{|j|} m_{|j|}$ $(q^{|j|} = q^{|j_1|+|j_2|}$, $m_{|j|} = m_{|j_1|,\,|j_2|}$ при $t \in [0, T]$, C *и* q — *произвольные постоянные* $> 1)$ *единственно.*

5. Единственность представления п.о. матриц (случай выражения в частных разностях). Пусть A — полоса, состоящая из точек $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, имеющих следующие координаты: $\alpha_1 = 0, 1, \ldots, r_1 - 1$; $\alpha_2 = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$

Через $\chi_{\alpha;j}$ $(\alpha \in A$, $j = (j_1, j_2) \in G_2)$ обозначим фундаментальную систему решений уравнения $Lu = \lambda u$, где L — разностное выражение (13), удовлетворяющее следующим условиям, заданным на $r_1^+ + r_2^+$ прямых $j_1 = a - r_1^-, \ldots, a + r_1^+ - 1$, где a — целое фиксированное:

$$\chi_{(\alpha_1,\alpha_2);(j_1,j_2)}(\lambda) = \delta_{(j_1,j_2);(\alpha_1+a-r_1^-,\alpha_2)}$$

$$(j_1 = a - r_1^-, \ldots, a + r_1^+ - 1; \quad j_2 = \ldots, -1, 0, 1, \ldots; \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in A).$$

Можно доказать следующую теорему о представлении п. о. матриц K через данную систему решений разностного уравнения $Lu = \lambda u$.

Теорема 6. *Пусть* $K = \| K_{jk} \|_{j,k \in G_2}$ — *п. о. матрица,* $\chi_{\alpha;j}(\lambda)$ — *фундаментальная система решений уравнения* $Lu = \lambda u$, *где* L — *выражение* (13).

Для того чтобы было справедливо представление

$$K_{jk} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{\alpha,\beta \in A} \chi_{\alpha;j}(\lambda) \overline{\chi_{\beta;k}(\lambda)}\, d\varrho_{\alpha\beta}(\lambda), \tag{14}$$

где $\| d\varrho_{\alpha\beta}(\lambda) \|_{\alpha,\beta \in A}$ — *некоторая п. о. матрица, необходимо и достаточно выполнения соотношения*

$$L_j K = \overline{L}_k K. \tag{15}$$

Матрица $\| d\varrho_{\alpha\beta}(\lambda) \|_{\alpha,\beta \in A}$ *определяется однозначно тогда и только тогда, когда замыкание в* H_k *оператора* $u \to L^+ u$, $u \in l_{2,0}(G_2)$ *максимально.*

Базируясь на этой теореме и теореме 5, можно доказать следующую теорему.

Теорема 7. *Пусть* L—*разностное выражение* (13), $K = \|K_{jk}\|_{j,k \in G_2}$— *п. о. матрица, удовлетворяющая условию* (15), *так что имеет место представление* (14). *Для однозначности определения матрицы* $\|d\varrho_{\alpha\beta}(\lambda)\|_{\alpha\beta \in A}$ *из представления* (14) *достаточно выполнения оценки*

$$| K_{jk} | \leqslant C q^{|j|+|k|} m_{|j|} m_{|k|},$$

где C, q — *произвольные константы* > 1, *а* m_l $(l = (l_1, l_2),\ l_1, l_2 \geqslant 0)$ — *последовательность, удовлетворяющая условиям, указанным в теореме* 5.

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему руководителю Ю. М. Березанскому за руководство и помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. М. Березанский, ДАН СССР, т. 136, № 5, 1961.
2. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, изд-во «Наукова Думка», К., 1965.
3. Н. Н. Чаус, О представлении положительно определенных ядер через собственные функции разностных выражений, УМЖ, Наст. журн., стр. .
4. С. Мандельбройт, Квазианалитические классы функций, 1937.

Поступила 30.V 1964 г.
Киев — Ханой