Об одном рекуррентном соотношении для числовых функций

А. Г. Чуич

Вопрос о разложении натуральных чисел на простые слагаемые может быть рассматриваемым с двух точек зрения. С одной стороны, можно поставить вопрос о минимальных свойствах сумм простых слагаемых, представляющих данное натуральное число (сюда примыкает ряд вопросов, связанных с известной «проблемой Гольдбаха»); с другой стороны, возможно рассматривать максимальные свойства таких сумм. В последнем случае одна из задач, относящаяся к разложению данного натурального числа на простые слагаемые, может быть поставлена следующим образом.

Будем рассматривать разложение данного натурального числа только на различные простые слагаемые. Очевидно, что с возрастанием натурального числа будет возрастать и число способов представлений его в виде различных простых слагаемых, хотя такое возрастание не всегда будет монотонным. Обозначим через $A(n)$ число всевозможных представлений натурального числа n в виде суммы различных простых слагаемых; если n простое, то за одно из разложений на простые слагаемые будем считать $n = n$.

Пусть, далее, числовая функция $r(n)$ выражает для нечетных чисел n сумму различных простых делителей n; для четных чисел n вида $n = 4m$ функция $r(n)$ выражает сумму различных простых делителей n, взятую со знаком минус, и для четных n вида $n = 4m + 2$ функция $r(n)$ выражает сумму простых делителей n, взятую со знаком минус, $+ 4$.

В настоящей статье устанавливается рекуррентное соотношение, связывающее числовую функцию $r(n)$ с числом разложений данного натурального числа на сумму различных простых слагаемых (т. е. с функцией $A(n)$).

Указанное соотношение между числовыми функциями $r(n)$ и $A(n)$ устанавливается следующей теоремой.

Теорема. *Для всякого натурального $n \geqslant 2$ имеет место равенство*

$$r(n)+r(n-2)A(2)+r(n-3)A(3)+\ldots+r(3)A(n-3)+r(2)A(n-2)=nA(n). \tag{1}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $R(z)$, определенную бесконечным произведением:

$$R(z) = (1 + z^{p_1})(1 + z^{p_2})\ldots(1 + z^{p_k})\ldots \tag{2}$$

для всех значений $|z| \leqslant q < 1$, где $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k, \ldots$ суть последовательные простые числа и q — положительное постоянное число.

Вследствие абсолютной и равномерной сходимости бесконечного произведения для $|z| \leqslant q < 1$ (так как ряд $z^2 + z^3 + z^5 + z^7 + \ldots$ сходится абсолютно и равномерно для $|z| \leqslant q < 1$) можно это произведение разложить в бесконечный ряд

$$R(z) = 1 + A_2z^2 + A_3z^3 + A_4z^4 + \ldots + A_nz^n + \ldots, \tag{3}$$

который тоже будет сходиться равномерно и абсолютно для $|z| \leqslant q < 1$. Так как при разложении произведения (2) в ряд (3) показатель при z степени n может получиться только в результате сложения некоторых чисел из ряда $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k, \ldots$, причем ни одна из таких сумм, составляющая число n, не может быть пропущена, то коэффициент $A_n = A(n)$ (при $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$) и ряд (3) может быть записан в виде

$$R(z) = 1 + A(2)z^2 + A(3)z^3 + A(4)z^4 + \ldots + A(n)z^n + \ldots \tag{4}$$

Взяв, далее, логарифмическую производную (по z) от обеих частей равенства (2), получим:

$$\frac{R'(z)}{R(z)} = \frac{p_1z^{p_1-1}}{1+z^{p_1}} + \frac{p_2z^{p_2-1}}{1+z^{p_2}} + \frac{p_3z^{p_3-1}}{1+z^{p_3}} + \ldots + \frac{p_kz^{p_k-1}}{1+z^{p_k}} + \ldots$$

и, умножая обе части этого равенства на z, будем иметь:

$$\frac{zR'(z)}{R(z)} = \frac{p_1z^{p_1}}{1+z^{p_1}} + \frac{p_2z^{p_2}}{1+z^{p_2}} + \frac{p_3z^{p_3}}{1+z^{p_3}} + \ldots + \frac{p_kz^{p_k}}{1+z^{p_k}} + \ldots \tag{5}$$

Разлагая в ряд (для $|z| \leqslant q < 1$) общий член правой части равенства (5), имеем

$$\frac{p_k z^{p_k}}{1+z^{p_k}} = p_k z^{p_k} - p_k z^{2p_k} + p_k z^{3p_k} - \ldots + (-1)^{v+1} p_k z^{vp_k} + \ldots$$
$$(k = 1,\ 2,\ 3, \ldots, k), \tag{6}$$

где p_k обозначает последовательное просто число номера k.

Суммируя обе части равенства (6) по k от $k=1$ до ∞ и собирая члены с одинаковыми степенями z (что возможно вследствие абсолютной и равномерной сходимости рядов (5) и (6) при $|z| \leqslant q < 1$), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k z^{p_k}}{1+z^{p_k}} = 2z^2 + 3z^3 - 2z^4 + 5z^5 + (2-3)\,z^6 + 7z^7 - 2z^8 + 3z^9 +$$
$$+ (2-5)\,z^{10} + 11z^{11} + (-2-3)z^{12} + \ldots + (\pm d_1 \pm d_2 \pm \ldots \pm d_s)\,z^n + \ldots, \tag{7}$$

где $d_1;\ d_2; \ldots; d_s$ суть все различные простые делители n, взятые со знаком «+», если числа вида $\frac{n}{d_i}$ $(i = 1,\ 2, \ldots, s)$ нечетные, и со знаком «—», если числа вида $\frac{n}{d_i}$ $(i = 1,\ 2, \ldots, s)$ суть четные. Это следует из того, что члены, стоящие на нечетных местах в правых частях равенств (6), имеют знак «+» и все члены, стоящие на четных местах в правых частях равенств (6), имеют знак «—». Вследствие этих соображений заключаем, что общий член, стоящий коэффициентом при z^n в правой части формулы (7), равен определенной нами ранее функции $r(n)$, т. е.

$$(\pm d_1 \pm d_2 \pm \ldots \pm d_s) = r(n).$$

Формула (7) теперь имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k z^{p_k}}{1+z^{p_k}} = r(2)\,z^2 + r(3)\,z^3 + r(4)\,z^4 + \ldots + r(n)\,z^n + \ldots \tag{8}$$

Принимая во внимание формулы (5) и (8) для $|z| \leqslant q < 1$ получаем тождество

$$\frac{zR'(z)}{R(z)} = r(2)\,z^2 + r(3)\,z^3 + r(4)\,z^4 + \ldots + r(n)\,z^n + \ldots,$$

которое после подстановки вместо $R(z)$ правой части формулы (4) и вместо производной $R'(z)$ соответствующей производной ряда (4), дает выражение

$$2A(2)\,z^2 + 3A(3)\,z^3 + 4A(4)\,z^4 + 5z^5A(5) + \ldots + nA(n)\,z^n + \ldots =$$
$$= (1 + A(2)\,z^2 + A(3)\,z^3 + A(4)\,z^4 + \ldots + A(n)\,z^n +$$
$$+ \ldots)\,(z(2)\,z^2 + r(3)z^3 + r(4)z^4 + \ldots + r(n)\,z^n + \ldots). \tag{9}$$

Раскрывая скобки в правой части равенства (9) и приравнивая коэффициенты при z^n, стоящие в правой и левой частях равенства (9), получаем $r(n) + r(n-2)A(2) + r(n-3)A(3) + \ldots + r(3)\,A(n-3) + r(2)\,A(n-2) = nA(n)$, что и доказывает теорему.

Поступила 24.VII 1962 г.
Никополь