1965 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 17, № 3
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

О применении метода вариации параметра к вычислению союзной матрицы и ее определителя

Д. Ф. Давиденко

В настоящей работе метод вариации параметра [1, 2] применяется к приближенному вычислению союзной матрицы и ее определителя для заданной неособенной матрицы $A(\lambda)$, элементы которой зависят от параметра λ, принимающего заданные значения на некотором конечном интервале $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*$.

При этом, прежде всего, рассматривается вопрос построения дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют союзная матрица $C(\lambda)$ и ее определитель $D(\lambda)$ для решения $X(\lambda)$ матричного уравнения

$$\frac{dX(\lambda)}{d\lambda} = Q(\lambda)\, X(\lambda). \tag{$*$}$$

Эти дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dC(\lambda)}{d\lambda} &= C(\lambda)\,[\operatorname{Sp} Q(\lambda)\cdot E - Q(\lambda)], \\ \frac{dD(\lambda)}{d\lambda} &= (n-1)\, D(\lambda) \operatorname{Sp} Q(\lambda) \end{aligned} \tag{$**$}$$

дают возможность определять $C(\lambda)$ и $D(\lambda)$ для заданных λ из интервала $\lambda_0 \leqslant \lambda < \lambda^*$, не прибегая к вычислению самого решения $X(\lambda)$ матричного уравнения ($*$).

Задача вычисления для заданных λ союзной матрицы и ее определителя для матрицы $A(\lambda)$ сводится, вообще говоря, к численному интегрированию на интервале $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*$ уравнений ($**$) при

$$Q(\lambda) = -A(\lambda)\frac{dA^{-1}(\lambda)}{d\lambda},$$

которые приводятся в этом случае к виду

$$\begin{aligned} \frac{dC(\lambda)}{d\lambda} &= \left[\operatorname{Sp}\left(A^{-1}(\lambda)\frac{dA(\lambda)}{d\lambda}\right)\cdot E - A^{-1}(\lambda)\frac{dA(\lambda)}{d\lambda}\right] C(\lambda), \\ \frac{dD(\lambda)}{d\lambda} &= (n-1)\, D(\lambda) \operatorname{Sp}\left(A^{-1}(\lambda)\frac{dA(\lambda)}{d\lambda}\right). \end{aligned} \tag{$***$}$$

Все вычисления располагаются в компактную схему и с удобством осуществляются на современных быстродействующих вычислительных машинах.

Отметим, что вычисление элементов обратной матрицы $A^{-1}(\lambda)$ на каждом шаге численного интегрирования уравнений $(***)$ также проводится методом вариации параметра [3].

Работа состоит из пяти параграфов. В первом — постановка задачи, во втором — формулировка и доказательство теорем, на основании которых получаются дифференциальные уравнения $(**)$. В третьем параграфе разрабатывается методика вычисления союзной матрицы и ее определителя для матрицы $A(\lambda)$. В четвертом параграфе излагается применение метода к постоянным матрицам. Наконец, в пятом параграфе приводятся иллюстративные примеры.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим квадратную матрицу $A(\lambda) = \| a_{ij}(\lambda) \|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ n-го порядка, элементы которой являются функциями параметра λ, принимающего заданные значения на некотором конечном интервале $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*$.

Матрицу $A^{-1}(\lambda) = \| \alpha_{ij}(\lambda) \|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ назовем обратной к матрице $A(\lambda)$, если

$$A^{-1}(\lambda) A(\lambda) = E, \tag{1}$$

где E — единичная матрица.

Матрицу $C(\lambda) = \| c_{ij}(\lambda) \|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, в которой $c_{ij}(\lambda) = A_{ji}(\lambda)$, где $A_{ji}(\lambda)$ — алгебраическое дополнение элемента $a_{ji}(\lambda)$ в определителе $\Delta(\lambda)$ матрицы $A(\lambda)$, будем называть союзной матрицей для матрицы $A(\lambda)$.

Определитель матрицы $C(\lambda)$ будем обозначать через $D(\lambda)$.

Предположим: что функции $a_{ij}(\lambda)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ определены и непрерывны на всем интервале $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*$ и имеют на этом интервале непрерывные производные; кроме того, что матрица $A(\lambda)$ имеет на интервале $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*$ отличный от нуля определитель $\Delta(\lambda)$; далее, что при некотором значении параметра λ из интервала $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*$, например, $\lambda = \lambda_0$, величина определителя $D(\lambda)$ матрицы $C(\lambda)$ и значения ее элементов известны

$$\text{при } \lambda = \lambda_0 \quad D(\lambda) = D^{(0)}, \quad C(\lambda) = C_0. \tag{2}$$

Требуется найти приближенные значения определителя $D(\lambda)$ и элементов матрицы $C(\lambda)$ для всех заданных значений параметра λ из интервала $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*$.

Для получения указанных величин воспользуемся методом вариации параметра [1, 2]. С этой целью предварительно докажем две теоремы.

§ 2. Формулировка и доказательство теорем.

Теорема 1. *Пусть $Q(\lambda) = \| q_{ij}(\lambda) \|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ — квадратная матрица n-го порядка с непрерывными элементами на интервале $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*$ и пусть $X(\lambda) = \| x_{ij}(\lambda) \|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ — матрица-функция на $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*$, удовлетворяющая уравнению*

$$\frac{dX(\lambda)}{d\lambda} = Q(\lambda) X(\lambda) \qquad (\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*). \tag{3}$$

Тогда определитель $D(\lambda)$ союзной матрицы $C(\lambda)$ к матрице $X(\lambda)$ удовлетворяет на интервале $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*$ уравнению

$$\frac{dD(\lambda)}{d\lambda} = (n-1) D(\lambda) \operatorname{Sp} Q(\lambda). \tag{4}$$

Доказательство. Дифференцируя по λ определитель

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} X_{11}(\lambda) & X_{21}(\lambda) & \ldots & X_{n1}(\lambda) \\ X_{12}(\lambda) & X_{22}(\lambda) & \ldots & X_{n2}(\lambda) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{1n}(\lambda) & X_{2n}(\lambda) & \ldots & X_{nn}(\lambda) \end{vmatrix},$$

получим

$$\frac{dD(\lambda)}{d\lambda}=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} X_{11}(\lambda) & \dots & X_{k-1,1}(\lambda) & \dfrac{dX_{k1}(\lambda)}{d\lambda} & X_{k+1,1}(\lambda) & \dots & X_{n1}(\lambda) \\ X_{12}(\lambda) & \dots & X_{k-1,2}(\lambda) & \dfrac{dX_{k2}(\lambda)}{d\lambda} & X_{k+1,2}(\lambda) & \dots & X_{n2}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{1n}(\lambda) & \dots & X_{k-1,n}(\lambda) & \dfrac{dX_{kn}(\lambda)}{d\lambda} & X_{k+1,n}(\lambda) & \dots & X_{nn}(\lambda) \end{vmatrix}, \quad (5)$$

где

$$\frac{dX_{kl}(\lambda)}{d\lambda}=(-1)^{k+l}\frac{d}{d\lambda}\begin{vmatrix} x_{11}(\lambda) & \dots & x_{k-1,1}(\lambda) & x_{k+1,1}(\lambda) & \dots & x_{n1}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1,l-1}(\lambda) & \dots & x_{k-1,l-1}(\lambda) & x_{k+1,l-1}(\lambda) & \dots & x_{n,l-1}(\lambda) \\ x_{1,l+1}(\lambda) & \dots & x_{k-1,l+1}(\lambda) & x_{k+1,l+1}(\lambda) & \dots & x_{n,l+1}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n}(\lambda) & \dots & x_{k-1,n}(\lambda) & x_{k+1,n}(\lambda) & \dots & x_{nn}(\lambda) \end{vmatrix}$$

$$(k, l=1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

Далее, из (3) следует, что

$$\frac{dx_{ij}(\lambda)}{d\lambda}=\sum_{\mu=1}^{n} q_{i\mu}(\lambda)\, x_{\mu j}(\lambda) \qquad (i, j=1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), находим

$$\frac{dX_{kl}(\lambda)}{d\lambda}=\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{n}\left[X_{kl}(\lambda)\, q_{pp}(\lambda)-X_{pl}(\lambda) q_{pk}(\lambda)\right] \quad (k, l=1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

В силу (8), выражение (5) можно записать следующим образом:

$$\frac{dD(\lambda)}{d\lambda}=D(\lambda)\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{p=1 \\ p\neq k}}^{n} q_{pp}(\lambda).$$

Прибавим и вычтем в правой части последнего равенства выражение

$$D(\lambda)\sum_{p=1}^{n} q_{pp}(\lambda).$$

В результате будем иметь

$$\frac{dD(\lambda)}{d\lambda}=(n-1)\, D(\lambda)\sum_{p=1}^{n} q_{pp}(\lambda)$$

где, очевидно,

$$\sum_{p=1}^{n} q_{pp}(\lambda)=\operatorname{Sp} Q(\lambda).$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть* $X(\lambda)=\|x_{ij}(\lambda)\|$ $(i, j=1, 2, \dots, n)$ — *матрица-функция на интервале* $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*$, *удовлетворяющая уравнению* (1).

Тогда союзная матрица $C(\lambda)$ к матрице $X(\lambda)$ удовлетворяет на интервале $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*$ следующему уравнению:

$$\frac{dC(\lambda)}{d\lambda} = C(\lambda)\,[\operatorname{Sp} Q(\lambda)\, E - Q(\lambda)], \tag{9}$$

где E — единичная матрица n-го порядка.

Доказательство. Перепишем формулу (8) следующим образом:

$$\frac{dX_{kl}(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{p=1}^{n} [X_{kl}(\lambda)\, q_{pp}(\lambda) - X_{pl}(\lambda)\, q_{pk}(\lambda)] \tag{10}$$

$$(k, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Так как, очевидно, сумма

$$\sum_{p=1}^{n} X_{pl}(\lambda)\, q_{pk}(\lambda)$$

представляет собой элемент матрицы $C(\lambda)\,Q(\lambda)$, стоящий на пересечении l-й строки и k-го столбца, а $\sum_{p=1}^{n} q_{pp}(\lambda) = \operatorname{Sp} Q(\lambda)$, систему n^2 дифференциальных уравнений (10) можно записать в виде одного матричного уравнения

$$\frac{dC(\lambda)}{d\lambda} = \operatorname{Sp} Q(\lambda) \cdot C(\lambda) - C(\lambda)\, Q(\lambda).$$

Теорема 2 доказана.

Замечание. Уравнения (4) и (9) можно получить также несколько другим путем, а именно: путем дифференцирования по λ известного [5] соотношения между определителем и определителем союзной матрицы для матрицы $X(\lambda)$ и тождества $X(\lambda)C(\lambda) = \Delta(\lambda)E$, пользуясь при этом теоремой (7.3) из [6] и уравнением (3).

§3. Вычисление союзной матрицы и ее определителя для матриц, зависящих от параметра. Итак, пусть требуется найти для матрицы $A(\lambda) = \| a_{ij}(\lambda) \|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, рассмотренной в §1, приближенные значения определителя $D(\lambda)$ и элементов $c_{ij}(\lambda)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ союзной матрицы $C(\lambda)$ для всех заданных значений $\lambda > \lambda_0$ из интервала $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*$. С этой целью поступаем следующим образом.

Продифференцируем тождество (1) по λ и разрешим затем относительно производной $\frac{dA(\lambda)}{d\lambda}$. В результате будем иметь

$$\frac{dA(\lambda)}{d\lambda} = -A(\lambda)\frac{dA^{-1}(\lambda)}{d\lambda}\, A(\lambda). \tag{11}$$

Полагая теперь

$$-A(\lambda)\frac{dA^{-1}(\lambda)}{d\lambda} = Q(\lambda)$$

и пользуясь доказанными выше теоремами, получим для определителя $D(\lambda)$ и матрицы $C(\lambda)$ соответственно следующие уравнения:

$$\frac{dD(\lambda)}{d\lambda} = -(n-1)\, D(\lambda) \operatorname{Sp}\left(A(\lambda)\frac{dA^{-1}(\lambda)}{d\lambda}\right), \tag{12}$$

$$\frac{dC(\lambda)}{d\lambda} = C(\lambda)\left[-\operatorname{Sp}\left(A(\lambda)\frac{dA^{-1}(\lambda)}{d\lambda}\right)\cdot E + A(\lambda)\frac{dA^{-1}(\lambda)}{d\lambda}\right]. \tag{13}$$

Последние уравнения, в силу тождества

$$-A(\lambda)\frac{dA^{-1}(\lambda)}{d\lambda}=\frac{dA(\lambda)}{d\lambda}A^{-1}(\lambda),$$

можно переписать соответственно в виде

$$\frac{dD(\lambda)}{d\lambda}=(n-1)D(\lambda)\operatorname{Sp}\left(\frac{dA(\lambda)}{d\lambda}A^{-1}(\lambda)\right), \tag{12_1}$$

$$\frac{dC(\lambda)}{d\lambda}=C(\lambda)\left[\operatorname{Sp}\left(\frac{dA(\lambda)}{d\lambda}A^{-1}(\lambda)\right)\cdot E-\frac{dA(\lambda)}{d\lambda}A^{-1}(\lambda)\right]. \tag{13_1}$$

Уравнение (12_1) и (13_1), в силу очевидного тождества

$$\operatorname{Sp}\left(\frac{dA(\lambda)}{d\lambda}A^{-1}(\lambda)\right)=\operatorname{Sp}\left(A^{-1}(\lambda)\frac{dA(\lambda)}{d\lambda}\right),$$

можно переписать еще и так:

$$\frac{dD(\lambda)}{d\lambda}=(n-1)D(\lambda)\operatorname{Sp}\left(A^{-1}(\lambda)\frac{dA(\lambda)}{d\lambda}\right), \tag{12_2}$$

$$\frac{dC(\lambda)}{d\lambda}=\left[\operatorname{Sp}\left(A^{-1}(\lambda)\frac{dA(\lambda)}{d\lambda}\right)\cdot E-A^{-1}(\lambda)\frac{dA(\lambda)}{d\lambda}\right]C(\lambda). \tag{13_2}$$

Чтобы найти для заданных $\lambda>\lambda_0$ значения определителя $D(\lambda)$ и элементов союзной матрицы $C(\lambda)$, дифференциальные уравнения (12_2) и (13_2) численно интегрируем на интервале $\lambda_0\leqslant\lambda\leqslant\lambda^*$ при начальных условиях (2):

$$\text{при}\quad \lambda=\lambda_0\quad D(\lambda)=D^{(0)},\quad C(\lambda)=C_0.$$

Полученные при интегрировании численные значения $D(\lambda)$ и элементов матрицы $C(\lambda)$ для каждого заданного значения параметра λ и будут искомыми приближенными значениями определителя $D(\lambda)$ и элементов союзной матрицы $C(\lambda)$ для заданной матрицы $A(\lambda)$.

Обратим внимание на то, что уравнения (12_2) и (13_2) независимы между собой, а поэтому можно численно интегрировать каждое из этих уравнений в отдельности.

Отметим также, что при численном интегрировании уравнений (12_2) и (13_2) вычисление элементов обратной матрицы $A^{-1}(\lambda)$ на каждом шаге можно проводить также методом вариации параметра [3]. Для этого необходимо дополнительно предположить, что при $\lambda=\lambda_0$ известна обратная матрица $A^{-1}(\lambda)$:

$$\text{при}\ \lambda=\lambda_0\quad A^{-1}(\lambda)=A_0^{-1}, \tag{14}$$

и численно интегрировать на интервале $\lambda_0\leqslant\lambda\leqslant\lambda^*$ следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{dD(\lambda)}{d\lambda}=(n-1)D(\lambda)\operatorname{Sp}\left(A^{-1}(\lambda)\frac{dA(\lambda)}{d\lambda}\right),\\ \frac{dC(\lambda)}{d\lambda}=\left[\operatorname{Sp}\left(A^{-1}(\lambda)\frac{dA(\lambda)}{d\lambda}\right)\cdot E-A^{-1}(\lambda)\frac{dA(\lambda)}{d\lambda}\right]C(\lambda),\\ \frac{dA^{-1}(\lambda)}{d\lambda}=-A^{-1}(\lambda)\frac{dA(\lambda)}{d\lambda}A^{-1}(\lambda)\end{gathered} \tag{15}$$

при начальных условиях (2), (14)

$$\text{при } \lambda = \lambda_0 \quad D(\lambda) = D^{(0)}, \quad C(\lambda) = C_0, \quad A^{-1}(\lambda) = A_0^{-1}.$$

Отметим, наконец, что если определитель $\Delta(\lambda)$ матрицы $A(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$ известен, т. е.

$$\text{при } \lambda = \lambda_0 \quad \Delta(\lambda) = \Delta^{(0)},$$

то элементы союзной матрицы $C(\lambda)$ для матрицы $A(\lambda)$ можно, в силу [4], вычислять для заданных значений $\lambda > \lambda_0$ путем численного интегрирования на интервале $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*$ следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{dC(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\left[\operatorname{Sp}\left(C(\lambda)\frac{dA(\lambda)}{d\lambda}\right)\cdot E - C(\lambda)\frac{dA(\lambda)}{d\lambda}\right]C(\lambda), \\ \frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda} = \operatorname{Sp}\left[C(\lambda)\frac{dA(\lambda)}{d\lambda}\right]\end{gathered} \tag{16}$$

при начальных условиях

$$\text{при } \lambda = \lambda_0 \quad C(\lambda) = C_0, \quad \Delta(\lambda) = \Delta^{(0)}.$$

§ **4**. Вычисление союзной матрицы и ее определителя для постоянных матриц. Изложенный выше метод применим также и к вычислению союзной матрицы и ее определителя для постоянных матриц.

Действительно, пусть задана постоянная матрица D n-го порядка. Представим ее в виде суммы двух матриц D_0 и D_1 так, чтобы для матрицы D_0 союзная матрица C_0 и ее определитель $|C_0|$, а также обратная матрица D_0^{-1} легко определялись. Тогда матрица

$$D_\lambda = D_0 + \lambda D_1 \tag{17}$$

при $\lambda = 1$ совпадает с исходной матрицей D, а при $\lambda = 0$ имеет обратную D_λ^{-1} и союзную матрицу C_λ и ее определитель $|C_\lambda|$.

Поступая с матрицей (17) аналогично предыдущему (§ 3), получаем для вычисления определителя $|C_\lambda|$ следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{d|C_\lambda|}{d\lambda} = (n-1)|C_\lambda|\operatorname{Sp}(D_\lambda^{-1}D_1), \\ \frac{dD_\lambda^{-1}}{d\lambda} = -D_\lambda^{-1}D_1D_\lambda^{-1},\end{gathered} \tag{18}$$

а для вычисления элементов союзной матрицы C_λ — систему

$$\begin{gathered}\frac{dC_\lambda}{d\lambda} = [\operatorname{Sp}(D_\lambda^{-1}D_1)\cdot E - D_\lambda^{-1}D_1]C_\lambda, \\ \frac{dD_\lambda^{-1}}{d\lambda} = -D_\lambda^{-1}D_1D_\lambda^{-1}\end{gathered} \tag{19}$$

или, если предположить, что значение определителя $|D_0|$ известно,—систему

$$\begin{gathered}\frac{dC_\lambda}{d\lambda} = \frac{1}{|D_\lambda|}[\operatorname{Sp}(C_\lambda D_1)\cdot E - C_\lambda D_1]C_\lambda, \\ \frac{d|D_\lambda|}{d\lambda} = \operatorname{Sp}(C_\lambda D_1).\end{gathered} \tag{20}$$

Системы (18) и (19) (или (20)) численно интегрируем на интервале $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ соответственно при следующих начальных условиях:

$$\text{при } \lambda = 0 \quad |C_\lambda| = |C_0|, \quad D_\lambda^{-1} = D_0^{-1};$$

$$\text{при } \lambda = 0 \quad C_\lambda = C_0, \quad D_\lambda^{-1} = D_0^{-1}$$

$$(\text{или при } \lambda = 0 \quad C_\lambda = C_0, \quad |D_\lambda| = |D_0|).$$

Найденные при $\lambda = 1$ значения определителя $|C_\lambda|$ и элементов матрицы C_λ и будут искомыми значениями элементов союзной матрицы C и ее определителя для постоянной матрицы D.

§ 5. Примеры. В заключение рассмотрим два примера, иллюстрирующих содержание предыдущих параграфов.

Пример 1. Пусть задана матрица

$$A(\lambda) = \begin{Vmatrix} -1{,}000000000 & 0{,}086206896\lambda & 0{,}58620689\lambda & 0{,}12068965\lambda \\ 0{,}086206896\lambda & -1{,}000000000 & 0{,}12068965\lambda & 0{,}58620689\lambda \\ 0{,}064121644\lambda & 0{,}018541099\lambda & -1{,}00000000 & 0{,}22165413\lambda \\ 0{,}018541099\lambda & 0{,}064121644\lambda & 0{,}22165413\lambda & -1{,}00000000 \end{Vmatrix}.$$

Требуется найти приближенные значения элементов союзной матрицы $C(\lambda)$ и ее определителя $D(\lambda)$ для следующих значений параметра λ:

0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0.

Для матрицы $A(\lambda)$ при $\lambda = 0$ обратная матрица $A^{-1}(\lambda)$, союзная матрица $C(\lambda)$ и ее определитель $D(\lambda)$ легко определяются:

$$\lambda = 0, \quad A^{-1}(\lambda) = -E, \quad C(\lambda) = -E, \quad D(\lambda) = 1. \tag{21}$$

Чтобы найти приближенные значения элементов союзной матрицы $C(\lambda)$ и ее определителя $D(\lambda)$ для заданных $\lambda > 0$, уравнения (15) численно интегрируем на интервале $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ методом Рунге—Кутта при начальных условиях (21). Шаг интегрирования h выбираем равным 0,2. Результаты вычислений приведены в табл. 1.

Таблица 1

$c_{ij}(\lambda)$	$\lambda=0{,}2$	0,4	0,6	0,8	1,0
$c_{11}(\lambda) = c_{22}(\lambda)$ . . .	—0,99640901	—0,98550371	—0,96708625	—0,94095882	—0,90692385
$c_{12}(\lambda) = c_{21}(\lambda)$ . . .	—0,01802232	—0,03775365	—0,05941438	—0,08322489	—0,10940553
$c_{13}(\lambda) = c_{24}(\lambda)$ . . .	—0,11864799	—0,23979318	—0,36296033	—0,48767416	—0,61345932
$c_{14}(\lambda) = c_{23}(\lambda)$ . . .	—0,03142371	—0,07768835	—0,13919736	—0,21635407	—0,30956160
$c_{31}(\lambda) = c_{42}(\lambda)$ . . .	—0,01304474	—0,02649890	—0,04031528	—0,05444665	—0,06884578
$c_{32}(\lambda) = c_{41}(\lambda)$ . . .	—0,00450428	—0,01062661	—0,01840581	—0,02788068	—0,03909000
$c_{33}(\lambda) = c_{44}(\lambda)$ . . .	—0,99809708	—0,99233669	—0,98264191	—0,96893590	—0,95114192
$c_{34}(\lambda) = c_{43}(\lambda)$ . . .	—0,04508923	—0,09175276	—0,14007628	—0,19014546	—0,24204591
$D(\lambda)$	0,98347344	0,93393938	0,85332665	0,74613635	0,61939387

При $\lambda = 1$ точная матрица $C(\lambda)$ имеет вид

$$C(1) = \begin{Vmatrix} -0{,}90691870 & -0{,}10940690 & -0{,}61346317 & -0{,}30956742 \\ -0{,}10940690 & -0{,}90691870 & -0{,}30956742 & -0{,}61346317 \\ -0{,}068846252 & -0{,}039090676 & -0{,}95113799 & -0{,}24204792 \\ -0{,}039090676 & -0{,}068846252 & -0{,}24204792 & -0{,}95113799 \end{Vmatrix},$$

точное значение определителя

$$D(1) = 0{,}61936585.$$

Пример 2. Рассмотрим матрицу

$$A(\lambda) = \begin{Vmatrix} -1{,}00 & 1{,}00 & 0{,}00 & 0{,}00 \\ 0{,}25\lambda & -1{,}00 & 0{,}25\lambda & 0{,}00 \\ 0{,}00 & 0{,}25\lambda & -1{,}00 & 0{,}25\lambda \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 0{,}25\lambda & -1{,}00 \end{Vmatrix}.$$

Предположим, требуется найти для матрицы $A(\lambda)$ союзную матрицу $C(\lambda)$ и ее определитель $D(\lambda)$ для следующих значений параметра λ:

$$0;\quad 0{,}2;\quad 0{,}4;\quad 0{,}6;\quad 0{,}8;\quad 1{,}0.$$

При $\lambda = 0$ обратная матрица $A^{-1}(\lambda)$, союзная матрица $C(\lambda)$ и ее определитель $D(\lambda)$ легко определяются

$$\text{при } \lambda = 0 \quad A^{-1}(\lambda) = C(\lambda) = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}, \quad D(\lambda) = 1. \tag{22}$$

Для определения искомых значений элементов союзной матрицы $C(\lambda)$ и ее определителя $D(\lambda)$ для заданных $\lambda > 0$ уравнения (15) численно интегрируем на интервале $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ при начальных условиях (22). Интегрирование проводим методом Рунге—Кутта с шагом $h = 0{,}2$. Результаты вычислений приведены в табл. 2.

Таблица 2

$c_{ij}(\lambda)$	$\lambda = 0{,}2$	0,4	0,6	0,8	1,0
$c_{11}(\lambda)$ . .	−0,99500043	−0,98000121	−0,95500254	−0,92000485	−0,87500900
$c_{12}(\lambda)$ . .	−0,99750028	−0,99000077	−0,97750159	−0,96000296	−0,93750540
$c_{13}(\lambda)$ . .	−0,04999960	−0,09999904	−0,14999823	−0,19999695	−0,24999481
$c_{14}(\lambda)$ . .	−0,00249985	−0,00999956	−0,02249904	−0,03999812	−0,06249641
$c_{21}(\lambda)$ . .	−0,04987473	−0,09899938	−0,14662390	−0,19199823	−0,23437220
$c_{22}(\lambda)$ . .	−0,99750028	−0,99000077	−0,97750159	−0,96000296	−0,93750540
$c_{23}(\lambda)$ . .	−0,04999960	−0,09999904	−0,14999823	−0,19999695	−0,24999481
$c_{24}(\lambda)$ . .	−0,00249985	−0,00999956	−0,02249904	−0,03999812	−0,06249641
$c_{31}(\lambda)$ . .	−0,00249985	−0,00999956	−0,02249904	−0,03999812	−0,06249641
$c_{32}(\lambda)$ . .	−0,04999960	−0,09999904	−0,14999823	−0,19999695	−0,24999481
$c_{33}(\lambda)$ . .	−0,95000054	−0,90000129	−0,85000240	−0,80000413	−0,75000700
$c_{34}(\lambda)$ . .	−0,04749975	−0,08999948	−0,12749918	−0,15999884	−0,18749840
$c_{41}(\lambda)$ . .	−0,00012487	−0,00099966	−0,00337432	−0,00799873	−0,01562260
$c_{42}(\lambda)$ . .	−0,00249985	−0,00999956	−0,02249904	−0,03999812	−0,06249641
$c_{43}(\lambda)$ . .	−0,04749975	−0,08999948	−0,12749918	−0,15999884	−0,18749840
$c_{44}(\lambda)$ . .	−0,94750068	−0,89000173	−0,82750336	−0,76000601	−0,68751060
$D(\lambda)$ . . .	0,84424794	0,68380900	0,52827047	0,38586611	0,26297639

Для сравнения приводим точную матрицу $C(\lambda)$ для случая $\lambda = 1$

$$C(1) = \begin{Vmatrix} -0{,}875 & -0{,}9375 & -0{,}25 & -0{,}0625 \\ -0{,}234375 & -0{,}9375 & -0{,}25 & -0{,}0625 \\ -0{,}0625 & -0{,}25 & -0{,}75 & -0{,}1875 \\ -0{,}015625 & -0{,}0625 & -0{,}1875 & -0{,}6875 \end{Vmatrix}.$$

Точное значение определителя

$$D(1) = 0{,}26291275.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Ф. Давиденко, Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений, ДАН СССР, т. LXXXVIII, № 4, 1953.
2. Д. Ф. Давиденко, О приближенном решении систем нелинейных уравнений, Укр. матем. ж., т. V, № 2, 1953.
3. Д. Ф. Давиденко, О применении метода вариации параметра к обращению матриц, ДАН СССР, т. 131, № 3, 1960.
4. Д. Ф. Давиденко, О применении метода вариации параметра к вычислению определителей, ДАН СССР, т. 131, № 4, 1960.
5. Л. Я. Окунев, Высшая алгебра, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
6. Э. А. Коддингтон и Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1958.

Поступила 10.V 1961 г.
Днепропетровск