О существовании ядра на произведении графов

Л. П. Варвак

1. В статье излагаются несколько теорем о существовании ядра на произведении графов. Напомним сначала некоторые известные определения из теории графов.

Ориентированным графом G называется пара $[X, \Gamma]$, состоящая из множества X и бинарного отношения $\Gamma(x, y)$, определенного на X.

Элементы множества X называются вершинами графа G. Если для $a \in X$ и $b \in X$ выполняется отношение $\Gamma(a, b)$, то мы будем писать $b \in \Gamma(a)$; тогда $\Gamma(x)$ можно рассматривать как многозначное, не обязательно всюду определенное, отображение X в себя.

Если $b \in \Gamma(a)$, то упорядоченная пара $[a, b]$ называется дугой графа. Упорядоченное множество вершин $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ таких, что $x_{k+1} \in \Gamma(x_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, называется путем. Путь, у которого $x_1 = x_n$, называется контуром. Число $n-1$ называется длиной контура. Если Y — подмножество в X и Δ — ограничение бинарного отношения Γ на Y, т. е. если для $y \in Y$ $\Delta(y) = \Gamma(y) \cap Y$, то пара $[Y, \Delta]$ называется подграфом графа G.

В теории графов рассматриваются, в частности, игры на графах. Если дан граф $G = [X, \Gamma]$, то на нем следующим образом определяется игра двух лиц: вершины графа считаются возможными положениями игры, а допустимым ходом является переход от положения a к положению $b \in \Gamma(a)$. Одна из вершин отмечается и считается начальной, один из игроков считается начинающим. Игроки делают хода поочередно. Проигравшим считается тот игрок, у которого нет возможности сделать очередной ход.

Для выбора стратегии в игре на графе важное значение имеет понятие ядра графа. Ядром S графа $G = [X, \Gamma]$ называется любое подмножество $S \subset X$ такое, что: 1) $\forall(x)[(x \in S) \Rightarrow \Gamma(x) \cap S = \varnothing]$; 2) $\forall(x)[\neg(x \in S) \Rightarrow \Rightarrow \Gamma(x) \cap S \neq \varnothing]$. Иначе говоря, ядро S — это такое множество вершин графа, что не существует ни одной дуги, соединяющей вершины из S между собой, и что для каждой вершины, не принадлежащей S, существует хоть одна дуга, ведущая в вершину из S.

Не всякий граф обладает ядром. С другой стороны, если граф G обладает ядром, то стратегия, заключающаяся в выборе на каждом ходе вершины, принадлежащей ядру, является непроигрышной. В связи с этим существенно важным является критерий существования ядра на графе. В дальнейшем воспользуемся теоремой Ричардсона [1], дающей достаточные условия существования ядра на графе — конечный граф без контуров нечетной длины обладает ядром.

Если имеется n графов $G_1, G_2, \ldots, G_n$, то можно построить новый граф $G = [X, \Gamma]$, называемый произведением этих графов, по следующему правилу: множеством вершин X графа G является декартово произведение

$X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, а отношение Γ выполняется тогда и только тогда, когда выполняются отношения Γ_i для каждой i координаты. Иначе говоря,

$$\Gamma[(x_1, x_2, \ldots, x_n); (y_1, y_2, \ldots, y_n)] \Longleftrightarrow \Gamma_1(x_1 y_1) \& \Gamma_2(x_2, y_2) \& \ldots$$

$$\ldots \& \Gamma_n(x_n, y_n).$$

Важность понятия произведения графов для теории игр на графе связана с тем, что игра двух лиц на произведении графов эквивалентна одновременной игре этих лиц на графах-сомножителях, если ход каждого из противников заключается в одновременных ходах на каждом из графов.

2. Теорема 1. *Пусть $G_1, G_2 \ldots G_n$ — конечные графы, обладающие ядрами. Тогда их произведение $G = G_1 \times G_2 \ldots \times G_n$ также обладает ядром.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать теорему для случая $n = 2$. Пусть S_1 — ядро графа G_1, а S_2 — ядро G_2. Положим $\overline{S}_1 = X_1 \setminus S_1$; $\overline{S}_2 = X_2 \setminus S_2$. Разобьем $X = X_1 \times X_2$ на четыре непересекающиеся множества: $A_1 = S_1 \times S_2$; $A_2 = S_1 \times \overline{S}_2$; $A_3 = \overline{S}_1 \times S_2$; $A_4 = \overline{S}_1 \times \overline{S}_2$. Положим $Y = A_2 \cup A_3$ и образуем подграф H с множеством вершин Y; $H = [Y, \Delta]$, где Δ — ограничение Γ на Y. Докажем сначала, что H обладает ядром. Для доказательства заметим следующее: если $(x_1, x_2) \in A_2$ и (x_1, x_2) имеет образ (y_1, y_2) в $Y : (y_1, y_2) \in \Delta(x_1, x_2)$, то (y_1, y_2) принадлежит A_3. Действительно, в этом случае $y_1 \in \Gamma_1(x_1)$, а так как $x_1 \in S_1$, то $y_1 \in \overline{S}_1$ по определению S_1. Аналогично, если $(x_1', x_2') \in A_3$ имеет образ в Y, этот образ принадлежит A_2. Следовательно, во всяком пути $[z_1, z_2, \ldots, z_n]$ в H вершины с четными индексами принадлежат одному из множеств A_2 или A_3, а с нечетными индексами — другому. Тем самым любой контур в H имеет четную длину. Поэтому, согласно теореме Ричардсона, H обладает ядром S_H.

Теперь докажем, что множество вершин $S = A_1 \cup S_H$ является ядром в G. В самом деле, если $y \in A_1$, то $\Gamma(y) \in A_4$ и $\Gamma(y) \cap S = \varnothing$. Если же $y = (y_1, y_2) \in S_H$ и $z = (z_1, z_2) \in \Gamma(y)$, то $z_1 \in \Gamma_1(y_1)$ и $z_2 \in \Gamma_2(y_2)$. Тогда или $z_1 \in \overline{S}_1$, или $z_2 \in \overline{S}_2$, и поэтому $z \notin A_1$. Вместе с тем $z \notin S_H$ по определению S_H. Значит, $y \in S \Rightarrow \Gamma(y) \cap S = \varnothing$. Пусть теперь $y \notin S$. Тогда $y \in A_4 \cup (H \setminus S_H)$. Если $y \in A_4$, то $\Gamma(y) \cap A_1 \neq \varnothing$. Если же $y \in H \setminus S_H$, то $\Gamma(y) \cap S_H \neq \varnothing$. Значит, $y \notin S \Rightarrow \Gamma(y) \cap S = \varnothing$. Отсюда следует, что S — ядро графа G.

Доказанная теорема остается в силе, если условие конечности графов заменить условием их локальной конечности. Граф называется локально конечным, если каждая вершина имеет конечное число образов и конечное число прообразов. Теорема Ричардсона остается в силе и для локально конечных графов (см. [1]). Нетрудно заметить, что произведение локально конечных графов само является локально конечным графом. Поэтому доказанная теорема дословно переносится на случай локально конечных графов.

В случае, когда локально конечные графы, обладающие ядрами, удовлетворяют тому дополнительному условию, что каждая вершина имеет непустой образ, можно в явной форме выразить ядро на произведении через ядра сомножителей. Для формулировки соответствующего результата введем следующие обозначения.

Пусть $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ — подмножество множества чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$. Обозначим через $\hat{S}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ множество тех $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которых $x_{i_j} \in S_{i_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Также обозначим через $\overset{\vee}{S}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ такое подмножество $\hat{S}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, что $x_l \in X_l \setminus S_l$ для всех $l \neq i_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Теперь сформулируем и докажем теорему.

Теорема 2. *Пусть имеется n графов $G_1, G_2 \ldots G_n$ и пусть на каждом графе G_i существует ядро S_i. Кроме того, пусть каждая вершина каждого графа имеет непустой образ. Тогда: 1) при $n = 2s + 1$ множество вершин $S = \bigcup \hat{S}_{i_1 i_2 \ldots i_{s+1}}$, где объединение берется по всем сочетаниям по $s+1$ индексу из n, образует ядро на произведении G этих графов; 2) при $n = 2s$ ядро на произведении этих графов образует множество вершин $S = S_1^* \cup S_2^*$; $S_1^* = \bigcup \hat{S}_{i_1 i_2 \ldots i_{s+1}}$, где объединение берется по всем сочетаниям по $s+1$ индексу из n, а $S_2^* = \bigcup \overset{\vee}{S}_{1 i_1 i_2 \ldots i_{s-1}}$, где объединение берется по всем сочетаниям по $s-1$ индексу из множества индексов $\{2, 3, \ldots, n\}$.*

Доказательство. Пусть $n = 2s + 1$ и $x = (x_1 x_2 \ldots x_n) \in S$. Тогда по крайней мере для $s+1$ координаты $i_1 i_2 \ldots i_{s+1}$ $x_{i_j} \in S_{i_j}$. Поэтому, если $y = (y_1, y_2 \ldots y_n) \in \Gamma(x)$, то $y_{i_j} \notin S_{i_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, s+1)$ и $y \notin S$. Пусть теперь $x = (x_1, x_2 \ldots x_n) \in S$. Тогда по крайней мере для $s+1$ координаты $l_1, l_2 \ldots l_{s+1}$ $x_{l_j} \notin S_{l_j}$. Поэтому существует вершина $y = (y_1, y_2 \ldots y_n) \in \Gamma(x)$, у которой $y_{l_j} \in S_{l_j}$. Значит, $\Gamma(x) \cap S \ni y$.

Рассмотрим случай $n = 2s$. Примем $M = \bigcup \hat{S}_{i_1 i_2 \ldots i_s}$, где объединение берется по всем сочетаниям по s индексов из n. Точно так же, как и для случая $n = 2s + 1$, установим: $x \in S_1^* \Rightarrow \Gamma(x) \cap S = \varnothing$; $x \in X \setminus (S \cup M) \Rightarrow \Rightarrow \Gamma(x) \cap S \neq \varnothing$; $x \in S_2^* \Rightarrow \Gamma(x) \cap S_1^* = \varnothing$. Если $x = (x_1, x_2 \ldots x_n) \in S_2^*$, то $x_1 \in S_1$ и $y = (y_1, y_2 \ldots y_n) \in \Gamma(x)$ $y_1 \notin S_1$. Значит, $y \in S_2^* \cup S_1^*$. Поэтому $x \in S \Rightarrow \Gamma(x) \cap S = \varnothing$. Если же $x \in M \setminus S_2^*$, то $x_1 \notin S_1$. Поэтому $\Gamma_1(x_1) \cap S_1 = \varnothing$ и $\Gamma(x) \cap S_2^* = \varnothing$. Следовательно, $x \notin S \Rightarrow \Gamma(x) \cap S \neq \varnothing$. Таким образом, S есть ядро графа G.

Выразить в явном виде ядро на произведении мы можем и в том случае, когда у части сомножителей каждая вершина имеет непустой образ (причем на этих графах мы даже не требуем существования ядра), а остальные сомножители обладают ядрами, причем каждая вершина, принадлежащая любому ядру, имеет пустой образ. Тогда имеет место теорема 3.

Теорема 3. *Пусть имеется n графов $G_1, G_2 \ldots G_n$ и пусть на графах $G_k (k = 1, 2, \ldots, l \leqslant n)$ существует ядро S_k, причем $x_k \in S_k \Rightarrow \Gamma_k(x_k) = \varnothing$, а графы $G_m (m = l+1, \ldots, n)$ обладают свойством $x_m \in X_m \Rightarrow \Rightarrow \Gamma_m(x_m) \neq \varnothing$. Тогда множество $S = \bigcup_{i=1}^{l} \hat{S}_i$, где $\hat{S}_i = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_{i-1} \times S_i \times X_{i+1} \times \ldots \times X_n$, будет ядром на произведении G этих графов.*

Доказательство. Пусть $x = (x_1, x_2 \ldots x_n) \in S$; тогда найдется индекс i, для которого $x_i \in S_i$. Значит, $\Gamma_i(x_i) = \varnothing$ и $\Gamma(x) = \varnothing$. Тем более $\Gamma(x) \cap S = \varnothing$. Пусть теперь $x \notin S$. Тогда для каждого $m > l$ $\Gamma_m(x_m) \neq \varnothing$ по условию, а для каждого $i \leqslant l$ $\Gamma_i(x_i) \cap S \neq \varnothing$, так как $x_i \notin S_i$. Значит, $\Gamma(x) \cap S \neq \varnothing$. Следовательно, S — ядро графа G.

ЛИТЕРАТУРА

1 К. Берж, Теория графов и ее применения, ИЛ, М., 1962.

Поступила 16.IX 1964 г.
Киев