О конструктивной характеристике функций комплексного переменного в областях с кусочно-гладкой границей

Ю. И. Волков

1. Результаты данной работы существенно опираются на результаты работ В. К. Дзядыка, в которых изучена конструктивная характеристика функций, имеющих скорость приближения алгебраическими полиномами на границе области порядка $\omega[\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z)]$, где $\omega(t)$ — модуль непрерывности функции $f(z)$, непрерывной на границе области и аналитической внутри; $\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z)$— расстояние до линии уровня $|\varphi(z)|=1+\frac{1}{n}$, где $\varphi(z)$ — функция, осуществляющая конформное отображение внешности области на внешность единичного круга.

Естественно возникает вопрос о том, каковы будут непрерывные свойства функции $f(z)$, которая имеет другую скорость приближения алгебраическими полиномами, и, наоборот, дать такую характеристику непрерывных свойств функции, чтобы можно было эту функцию приближать многочленами с некоторой скоростью. В данной работе и рассматриваются некоторые вопросы в этом направлении.

2. Пусть G — произвольная конечная область с односвязным дополнением, граница C которой состоит из конечного числа дуг с непрерывной кривизной, образующих между собой в точках стыка z_j углы $\alpha_j\pi$ $(0<\alpha_j<1)$ и обладающих тем свойством, что в окрестности каждой из точек стыка z_j функцию $w=\varphi(z)$, отображающую внешность G на внешность единичного круга, можно представить в виде

$$\varphi(z)=\lambda(z)(z-z_j)^{\frac{1}{2-\alpha_j}}+\varphi(z_j), \tag{1}$$

где $\lambda(z)$ — функция, непрерывная в окрестности точки z_j вместе со своей первой и второй производными $\lambda'(z)$, $\lambda''(z)$ и $\lambda(z_j)\neq 0$.

Функция $\varrho_{1+h}(z)$, являющаяся расстоянием от точки границы до линии уровня C_{1+h} $|\varphi(z)|=1+h$ $(h>0)$, при каждом фиксированном z будет положительной неубывающей функцией от h, поэтому существует функция, обратная к $\varrho_{1+h}(z)$ относительно h. Обозначим эту функцию через $r(t, z)$. Тогда, в силу определения $r(t, z)$, имеем при каждом фиксированном z:

$$\varrho_{1+r(t,z)}(z)\equiv t; \qquad r[\varrho_{1+h}(z)]\equiv h. \tag{2}$$

В дальнейшем, через A_i $(i=1, 2, \ldots)$ будем обозначать постоянные, зависящие только от области G.

Известно ([1], нерав. (2.18), стр. 712), что величина $\varrho_{1+h}(z)$ оценивается следующим образом:

$$A_1 h(|z-z_j|+h^{2-\alpha_j})^{\frac{1-\alpha_j}{2-\alpha_j}}\leqslant\varrho_{1+h}(z)\leqslant A_2 h(|z-z_j|+h^{2-\alpha_j})^{\frac{1-\alpha_j}{2-\alpha_j}}. \tag{3}$$

Здесь z_j — ближайшая к z угловая точка.

Пользуясь неравенством (3), нетрудно проверить, что для $r(h, z)$ будет справедлива следующая оценка:

$$A_3 h(|z-z_j|+h)^{\frac{\alpha_j-1}{2-\alpha_j}}\leqslant r(h, z)\leqslant A_4 h(|z-z_j|+h)^{\frac{\alpha_j-1}{2-\alpha_j}}. \tag{4}$$

Пусть функция $f(z)$ аналитическая в области G и непрерывная на $\overline{G}$. Введем следующее определение.

Определение. *Локальным модулем непрерывности функции называется величина*

$$\omega(f;\ h;\ z) = \sup|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)|,$$

$$\zeta_1,\ \zeta_2 \in \{|\zeta - z| \leqslant h\} \text{ и } \zeta_1,\ \zeta_2 \in C.$$

При сделанных выше предположениях на $f(z)$ и на область G имеет место теорема.

Теорема 1. *Если функция $f(z)$ имеет локальный модуль непрерывности $\omega(f;\ h;\ z)$, удовлетворяющий неравенству*

$$\omega(f;\ h;\ z) \leqslant \{\omega_1[r(h,\ z)]\}^{1-s}\cdot[\omega_2(h)]^s,$$

где $0 \leqslant s \leqslant 1$, а $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ — функции типа модуля непрерывности, то для функции $f(z)$ при каждом натуральном n можно построить алгебраический многочлен $P_n(z)$ степени не выше n такой, что во всех точках $z \in C$ будет выполняться неравенство

$$|f(z) - P_n(z)| \leqslant A_5\left|\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{1-s}\cdot[\omega_2(\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^s.$$

Для доказательства теоремы используются многочлены

$$D_n(z) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(s)\,ds\int_C \frac{f\{\psi[\varphi(\zeta)\,e^{-is}]\}}{\zeta - z}\,d\zeta,$$

где $K_n(s)$ — ядро Джексона, а $\psi(w)$ — функция, обратная к $\varphi(z)$. Эти многочлены были впервые введены В. К. Дзядыком ([2], стр. 797). Исходя из соотношения (2), доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2.1 [2] с незначительными изменениями, поэтому мы его приводить здесь не будем.

Лемма. *Если на границе C области G задан многочлен $Q_n(z)$ и такой, что*

$$|Q_n(z)| \leqslant \left[\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{1-s}\cdot[\omega_2(\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z))]^s,$$

где $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ — функции типа модуля непрерывности, а $0 \leqslant s \leqslant 1$, то

$$|Q_n'(z)| \leqslant A_6\left|\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{1-s}\cdot[\omega_2(\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z))]^s\cdot[\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^{-1}. \tag{5}$$

Эта лемма следует из доказательства теоремы 1 ([3], стр. 367).

Теорема 2. *Если для функции $f(z)$, заданной на границе C, существует последовательность алгебраических многочленов $P_n(z)$ таких, что при каждом $n=1, 2, \ldots$ во всех точках $z \in C$ выполняется неравенство*

$$|f(z) - P_n(z)| \leqslant \left[\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{1-s}\{\omega_2[\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z)]\}^s, \tag{6}$$

где $0 \leqslant s \leqslant 1$, а $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ — функции типа модуля непрерывности, то функция $f(z)$ имеет на C локальный модуль непрерывности $\omega(f;\ h;\ z)$, удовлетворяющий условию:

$$\omega(f;\ h;\ z) \leqslant A_z\left\{r(h,z)\int_{r(h,z)}^{1}\frac{\omega_1(u)}{u^2}\,du\right\}^{1-s}\cdot\left\{h\int_h^1\frac{\omega_2(u)}{u^2}\,du\right\}^s. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть z — произвольная точка кривой и ζ_1, ζ_2 — любые точки кривой C, лежащие в круге $|\zeta - z| \leqslant h$, где h — некоторое положительное число.

Запишем $f(\zeta_1) - f(\zeta_2)$ в виде

$$f(\zeta_1) - f(\zeta_2) = P_1(\zeta_1) - P_1(\zeta_2) + \sum_{j=1}^{N} \{[P_{2^j}(\zeta_1) - P_{2^j}(\zeta_2)] -$$

$$- [P_{2^{j-1}}(\zeta_1) - P_{2^{j-1}}(\zeta_2)]\} + [f(\zeta_1) - P_{2^N}(\zeta_1)] - [f(\zeta_2) - P_{2^N}(\zeta_2)], \qquad (8)$$

где N — натуральное число, которое выбираем так, чтобы

$$\frac{1}{2^N} < r(h, z) < \frac{1}{2^{N-1}}. \qquad (9)$$

Так как $\varrho_{1+t}(z)$ — функция неубывающая от t, то, учитывая (2), получаем из (9)

$$\varrho_{1+\frac{1}{2^N}}(z) \leqslant h \leqslant \varrho_{1+\frac{1}{2^{N-1}}}(z). \qquad (10)$$

Используя известные свойства $\varrho_{1+h}(z)$ (например [3]) при всех $\zeta \in \{|\zeta - z| \leqslant h\} \cap C$ и $i = 1, 2, \ldots$ имеем

$$A_8' \varrho_{1+\frac{1}{2^i}}(z) \leqslant \varrho_{1+\frac{1}{2^i}}(\zeta) \leqslant A_8 \varrho_{1+\frac{1}{2^i}}(z) \qquad (11)$$

и

$$\varrho_{1+\frac{1}{2^i}}(z) \geqslant A_9 \varrho_{1+\frac{1}{2^{i-1}}}(z). \qquad (12)$$

Используя (6), (5), (11), получим:

$$|P_{2^j}(z) - P_{2^{j-1}}(z)| \leqslant A_{10}\left[\omega_1\left(\frac{1}{2^j}\right)\right]^{1-s} \cdot \{\omega_2[\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z)]\}^s,$$

$$|P_{2^j}'(z) - P_{2^{j-1}}'(z)| \leqslant A_{11}[\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z)]^{-1} \cdot \left[\omega_1\left(\frac{1}{2^j}\right)\right]^{1-s} \cdot \{\omega_2[\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z)]\}^s. \qquad (13)$$

Оценим по модулю левую часть равенства (8); для этого, используя последовательно (6), (13), (9), (10), (3), (12) и (2), получим:

$$|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \leqslant \sum_{j=1}^{N} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} |P_{2^j}'(\zeta) - P_{2^{j-1}}'(\zeta)|\,|d\zeta| + \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} |P_1'(\zeta)| \cdot |d\zeta| +$$

$$+ A_{12}\left[\omega_1\left(\frac{1}{2^N}\right)\right]^{1-s} \cdot \{\omega_2[\varrho_{1+\frac{1}{2^N}}(z)]\}^s \leqslant$$

$$\leqslant A_{13} h \sum_{j=1}^{N}\left[\omega_1\left(\frac{1}{2^j}\right)\right]^{1-s} \cdot \{\omega_2[\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z)]\}^s \cdot [\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z)]^{-1} +$$

$$+ A_{12}\{\omega_1[r(h, z)]\}^{1-s} \cdot [\omega_2(h)]^s \leqslant$$

$$\leqslant A_{14} h \sum_{j=1}^{N} \frac{\left[\omega_1\left(\frac{1}{2^j}\right)\right]^{1-s} \{\omega_2[\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z)]\}^s}{[\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z)]^s \left\{\frac{1}{2^j}\left[|z - z_i| + \left(\frac{1}{2^j}\right)^{2-\alpha_i}\right]^{\frac{1-\alpha_i}{2-\alpha_i}}\right\}^{(1-s)}} +$$

$$+ A_{12}\{\omega_1[r(h,z)]\}^{1-s}\cdot\omega_2(h)]^s \leqslant A_{14}h\left[|z-z_i| + \left(\frac{1}{2^{N-1}}\right)^{2-\alpha_i}\right]^{\frac{1-\alpha_i}{2-\alpha_i}(s-1)} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{N}\left[\frac{\omega_1\left(\frac{1}{2^j}\right)}{\frac{1}{2^j}}\right]^{1-s}\cdot\left\{\frac{\omega_2[\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z)]}{\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z)}\right\}^s + A_{12}\{\omega_1[r(h,z)]\}^{1-s}\cdot[\omega_2(h)]^s \leqslant$$

$$\leqslant A_{14}h^s[\varrho_{1+r(h,z)}(z)]^{1-s}\cdot[|z-z_i| + [r(h,z)]^{2-\alpha_i}]^{\frac{1-\alpha_i}{2-\alpha_i}(s-1)} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{N}\left[\frac{\omega_1\left(\frac{1}{2^j}\right)}{\frac{1}{2^j}}\right]^{1-s}\cdot\left\{\frac{\omega_2[\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z)]}{\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z)}\right\}^s + A_{12}\{\omega_1[r(h,z)]\}^{1-s}\cdot[\omega_2(h)]^s. \quad (14)$$

Найдем

$$\int_{1/2^j}^{1/2^{j-1}} \frac{\omega_1(t)}{t^2}\,dt \geqslant \frac{\omega_1\left(\frac{1}{2^j}\right)}{\left(\frac{1}{2^{j-1}}\right)^2}\left(\frac{1}{2^{j-1}} - \frac{1}{2^j}\right) \geqslant A_{15}\,\frac{\omega_1\left(\frac{1}{2^{j-1}}\right)}{\frac{1}{2^{j-1}}}. \quad (15)$$

Кроме того, имеет место:

$$\frac{\omega_2[\varrho_{1+\frac{1}{2^{j-1}}}(z)]}{\varrho_{1+\frac{1}{2^{j-1}}}(z)} \leqslant A_{16}\int_{\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z)}^{\varrho_{1+\frac{1}{2^{j-1}}}(z)} \frac{\omega_2(t)}{t^2}\,dt. \quad (16)$$

Это неравенство установлено в работе [3] (стр. 372).

Подставляя (15) и (16) в (14), используя (3) и неравенство Гельдера, олучим:

$$|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \leqslant A_{17}h^s[r(h,z)]^{1-s}\left\{\sum_{j=1}^{N}\int_{1/2^j}^{1/2^{j-1}}\frac{\omega_1(t)}{t^2}\,dt\right\}^{1-s} \times$$

$$\times\left\{\sum \int_{\varrho_{1+\frac{1}{2^j}}(z)}^{\varrho_{1+\frac{1}{2^{j-1}}}(z)}\frac{\omega_2(t)}{t^2}\,dt\right\}^s +$$

$$+ A_{12}\{\omega_1[r(h,z)]\}^{1-s}\cdot[\omega_2(h)]^s.$$

Пользуясь неравенствами (9), (12), (10), получим:

$$|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \leqslant A_{17}h^s[r(h,z)]^{1-s}\left\{\int_{r(h,z)}^{1}\frac{\omega_1(t)}{t^2}\,dt\right\}^{1-s}\cdot\left\{\int_h^1\frac{\omega_2(t)}{t^2}\,dt\right\}^s +$$

$$+ A_{12}\{\omega_1[r(h,z)]\}^{1-s}\cdot[\omega_2(h)]^s.$$

Учитывая, далее, что $\omega_2(h)\cdot\left[h\int\limits_h^1\frac{\omega_2(t)}{t^2}dt\right]^{-1}\leqslant\omega_2(h)\left[h\cdot\omega_2(h)\cdot\frac{1}{h}\right]^{-1}=$ $=1$, аналогично $\omega_1[r(h,z)]\cdot\left\{r(h,z)\int\limits_{r(h,z)}^1\frac{\omega_1(t)}{t^2}dt\right\}^{-1}=o(1)$ получим, что

$$|f(\zeta_1)-f(\zeta_2)|\leqslant A_{18}\left\{r(h,z)\int\limits_{r(h,z)}^1\frac{\omega_1(t)}{t^2}dt\right\}^{1-s}\cdot\left\{h\int\limits_h^1\frac{\omega_2(t)}{t^2}dt\right\}^{s},$$

что и требовалось доказать.

Если выполняются еще условия:

$$t\int\limits_t^1\frac{\omega_1(x)}{x^2}dx\leqslant A_{19}\omega_1(t)\text{ и }t\int\limits_t^1\frac{\omega_2(x)}{x^2}dx\leqslant A_{20}\omega_2(t)\tag{17}$$

при всех $t\in(0,1]$, то теоремы 1 и 2 дают необходимые и достаточные условия того, чтобы выполнялось неравенство (6) для всех $z\in C$.

Следствие 1. Пусть $s=0$ и $\omega_1(t)=t^\alpha$, $0<\alpha<1$; тогда чтобы для функции $f(z)$, аналитической в G и непрерывной на $\overline{G}$, существовала последовательность алгебраических многочленов таких, что при каждом $n=1, 2, \ldots$ для всех точек $z\in C$ выполнялось неравенство

$$|f(z)-P_n(z)|\leqslant\frac{1}{n^\alpha},\text{ где }0<\alpha<1,$$

необходимо и достаточно, чтобы локальный модуль непрерывности функции $f(z)$ удовлетворял условию

$$\omega(f;h;z)\leqslant A_{21}[r(h,z)]^\alpha.$$

Используя соотношения (3) и (1), нетрудно проверить, что это утверждение эквивалентно следующему.

Для того чтобы функцию $f(z)$ можно было приблизить многочленами со скоростью $1/n^\alpha$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\hat{f}(w)=$ $=f[\psi(w)]$ принадлежала классу $\mathrm{Lip}\,\alpha$ на окружности.

Следствие 2. Пусть $s=1$ и $\omega_2(t)=t^\alpha$, $0<\alpha<1$, тогда получим известное предложение ([2]).

Для того чтобы аналитическая в G функция $f(z)$ удовлетворяла на границе C условию $\mathrm{Lip}\,\alpha\,(0<\alpha<1)$, необходимо и достаточно, чтобы для функции $f(z)$ при каждом натуральном n нашелся алгебраический многочлен $P_n(z)$ степени не выше n такой, чтобы при всех $z\in C$ выполнялось неравенство

$$|f(z)-P_n(z)|\leqslant A_{22}[\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z)]^\alpha.$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. К. Дзядыку за постановку задачи и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Дзядык, О проблеме С. М. Никольского в комплексной области, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 23, 1959, 697—736.
2. В. К. Дзядык, К вопросу о приближении непрерывных функций в областях с углами и о проблеме С. М. Никольского, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 26, 1962, 796—824.
3. В. К. Дзядык, Обратные теоремы приближения функций в комплексных областях, УМЖ, т. XV, № 4, 1963, 365—375.

Поступила 7.V 1964 г.
Киев