Многомерное обобщение теоремы П. И. Романовского о сходимости сингулярных интегралов

В. Т. Гаврилюк

Обозначения и определения. Под A будем понимать m-мерное ограниченное измеримое множество положительной меры в m-мерном евклидовом (или декартовом) пространстве R_m, под x — фиксированную точку множества A.

$D_0 \subset R_m$ будет обозначать некоторую замкнутую и ограниченную область, звездную относительно точки x, содержащую в себе множество A и подчиненную тому условию, что пересечение поверхности σ_0 области D_0 с замыканием $\bar{A}$ множества A является непустым. Через D_λ и σ_λ обозначим множества, получаемые соответственно из D_0 и σ_0 преобразованием гомотетии с центром в точке x и коэффициентом подобия $q^\lambda (0 \leqslant \lambda \leqslant \infty)$, где $q < 1$ — фиксированное число.

Пусть $f(u)$ — функция класса L, заданная на множестве A и продолженная на все пространство R_m условием

$$f(u) = 0 \text{ на } R_m - A. \tag{1}$$

Условимся, вообще, писать $u \in \mathrm{Int}^*(A)$ [соответственно $x \in \mathrm{Int}^*(A)$], если $u \in A$ (соответственно $x \in A$) является для A внутренней точкой или точкой плотности.

Под многомерным сингулярным интегралом будем понимать интеграл Лебега вида

$$I_{\mathfrak{x}}(x) = \int_A f(u)\,\varphi_{\mathfrak{x}}(u, x)\, d_u\tau_m = \int_{D_0} f(u)\,\varphi_{\mathfrak{x}}(u, x)\, d_u\tau_m \quad (d_u\tau_m = du_1 du_2 \ldots du_m), \tag{2}$$

где индекс $\mathfrak{x}$, играющий роль направляющего аргумента в определении «предела по направлению $\mathfrak{D}$», пробегает полуупорядоченное множество $\mathfrak{D}$, удовлетворяющее условию Шатуновского (см. [2]), а суммируемая на A при любых фиксированных $x \in \mathrm{Int}^*(A)$ и $\mathfrak{x} \in \mathfrak{D}$, функция («сингулярное ядро») $\varphi_{\mathfrak{x}}(u, x)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{(\mathfrak{D})} \int_E \varphi_{\mathfrak{x}}(u, x)\, d_u\tau_m = 1, \tag{3}$$

которое должно выполняться для всякого измеримого множества $E \subset R_m$, такого, что $x \in \mathrm{Int}^*(E \cap A)$.

Как известно (см. [8]), производная неопределенного многомерного интеграла Лебега

$$\lim_{e \to x} \frac{1}{|e|} \int_e f(u)\, d_u\tau_m = \lim_{e \to x} \frac{\Phi(e)}{|e|}^* \qquad (e \subset A, f \in L) \tag{4}$$

почти везде на множестве A существует и равна $f(x)$, если множество e, стягиваясь к точке x, пробегает какое-нибудь регулярное семейство $\{e\}$.

Кроме того (см. [8], стр. 76) множество точек, где $\lim\limits_{e \to x} \dfrac{\Phi(e)}{|e|}$ не существует или не равен $f(x)$, входит в состав множества H меры нуль, независимого от выбора регулярного семейства множеств, с помощью которого определяется предел (4).

---

* Через $|E|$ здесь обозначаем Лебегову меру измеримого множества $E \subset R_m$.

Поэтому, в частности, регулярным семейством множеств при определении производной неопределенного интеграла $\Phi(e)$ может служить указанное выше гомотетическое семейство областей $\{D_\lambda\}$.

Доказательство обобщенной теорема П. И. Романовского [4, 1] будет базироваться на следующей лемме Ремеза — Натансона [3].

Лемма. *Пусть на D_{λ_0}, где λ_0— какое-нибудь фиксированное неотрицательное число, заданы две суммируемые функции $F(u)$ и $\psi(u)$ со следующими свойствами: $F(u)$ удовлетворяет условию*

$$\sup_{\lambda \geqslant \lambda_0} \left| \int\limits_{D_\lambda} F(u)\, d_u\tau_m : \int\limits_{D_\lambda} d_u\tau_m \right| = M < \infty; \tag{5}$$

функция $\psi(u)$, неотрицательная и конечная на D_{λ_0}, имеет поверхности σ_λ своими поверхностями уровня и не убывает при переходе от σ_λ к $\sigma_{\lambda'}$, где $0 \leqslant \lambda < \lambda'$.

Тогда имеет место неравенство

$$\left| \int\limits_{D_{\lambda_0}} F(u)\,\psi(u)\, d_u\tau_m \right| \leqslant M \int\limits_{D_{\lambda_0}} \psi(u)\, d_u\tau_m. \tag{6}$$

Теорема (обобщение теоремы П. И. Романовского). *Пусть $\varphi_{\mathfrak{x}}(u, x)$ — неотрицательное сингулярное ядро, удовлетворяющее тем условиям, что при фиксированных $\mathfrak{x} \in \mathfrak{D}$ и $x \in A$ оно является конечным и как функция от u имеет своими поверхностями уровня охарактеризованные выше множества σ_λ и, кроме того, является «монотонным неубывающим» относительно гомотетического семейства $\{D_\lambda\}$*, т. е.

$$\varphi_{\mathfrak{x}}(u', x) \geqslant \varphi_{\mathfrak{x}}(u'', x) \ \text{при} \ \lambda(u') > \lambda(u''), \tag{7}$$

где $\lambda(u)$ — функция, определенная условием $u \in \sigma_{\lambda(u)}$. Тогда для любой суммируемой функции $f(u)$ в каждой точке $x \in \mathrm{Int}^*(A)$, в которой $f(u)$ равна производной своего неопределенного интеграла (регулярным семейством служит семейство $\{D_\lambda\}$) имеет место равенство

$$\lim_{(\mathfrak{D})} \int\limits_A f(u)\,\varphi_{\mathfrak{x}}(u, x)\, d_u\tau_m = f(x). \tag{8}$$

Отсюда, в частности, заведомо следует, что равенство (8) *имеет место почти везде.*

Доказательство. Так как $\varphi_{\mathfrak{x}}(u, x)$ — сингулярное ядро, то доказательство предельного равенства (8) равносильно доказательству соотношения

$$\lim_{(\mathfrak{D})} \int\limits_A [f(u) - f(x)]\,\varphi_{\mathfrak{x}}(u, x)\, d_u\tau_m = 0 \tag{9}$$

в каждой точке $x \in \mathrm{Int}^*(A)$, в которой

$$\lim_{D_\lambda \to x} \frac{1}{|D_\lambda|} \int\limits_{D_\lambda} f(u)\, d_u\tau_m = f(x). \tag{10}$$

Возьмем произвольное, как угодно малое число $\varepsilon > 0$ и найдем такое $\lambda(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon, x)$, что при $\lambda \geqslant \lambda(\varepsilon)$ будем иметь

$$\left| \frac{1}{|D_\lambda|} \int\limits_{D_\lambda} [f(u) - f(x)]\, d_u\tau_m \right| < \varepsilon, \tag{11}$$

что возможно, так как в точке x имеет место (10).

Применяя лемму Ремеза — Натансона, сформулированную выше, будем иметь

$$\Big| \int\limits_{D_{\lambda(\varepsilon)}} [f(u) - f(x)]\, \varphi_{\mathfrak{x}}(u, x)\, d_u\tau_m \Big| \leqslant \varepsilon \int\limits_{D_{\lambda(\varepsilon)}} \varphi_{\mathfrak{x}}(u, x)\, d_u\tau_m \leqslant \varepsilon \int\limits_{D_0} \varphi_{\mathfrak{x}}(u, x)\, d_u\tau_m . \quad (12)$$

Из (3) следует существование постоянной $K(x)$ такой, что

$$\int\limits_{D_0} \varphi_{\mathfrak{x}}(u, x)\, d_u\tau_m \leqslant K(x) \text{ при } \mathfrak{x} \succ \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x}_0(x).$$

Значит, для всех $\mathfrak{x} \succ \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x}_0(x)$ имеем также

$$\Big| \int\limits_{D_{\lambda(\varepsilon)}} [f(u) - f(x)]\, \varphi_{\mathfrak{x}}(u, x)\, d_u\tau_m \Big| \leqslant \varepsilon K(x). \quad (13)$$

С другой стороны, при $\lambda \leqslant \lambda(\varepsilon)$ имеем

$$\varphi_{\mathfrak{x}}(u, x)_{u \in D_0 - D_{\lambda(\varepsilon)}} \leqslant \varphi_{\mathfrak{x}}(u, x)_{u \in \sigma_{\lambda(\varepsilon)}} \leqslant \frac{1}{|D_{\lambda(\varepsilon)}|} \int\limits_{D_{\lambda(\varepsilon)}} \varphi_{\mathfrak{x}}(u, x)\, d_u\tau_m \leqslant \frac{K(x)}{|D_{\lambda(\varepsilon)}|} \text{ при } \mathfrak{x} \succ \mathfrak{x}_0(x), \quad (14)$$

т. е. на множестве $D_0 - D_{\lambda(\varepsilon)}$ функции $\varphi_{\mathfrak{x}}(u, x)$ ограничены равномерно относительно $\mathfrak{x} \succ \mathfrak{x}_0(x)$ и, кроме того, в силу (3) справедливо равенство

$$\lim_{(\mathfrak{D})} \int\limits_{D_0 - D_{\lambda(\varepsilon)}} \varphi_{\mathfrak{x}}(u, x)\, d_u\tau_m = 0. \quad (15)$$

Таким образом, функции $\varphi_{\mathfrak{x}}(u, x)$ удовлетворяют условиям теоремы Лебега (см. [1], стр. 300, 372 — 376; [5], стр. 112) о слабой сходимости на множестве $D_0 - D_{\lambda(\varepsilon)}$.

Отсюда следует, что существует такой индекс $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_1(x, \varepsilon) \succ \mathfrak{x}_0(x)$, что для всех $\mathfrak{x}_0 \in \mathfrak{D}$, следующих за $\mathfrak{x}_1(x, \varepsilon)$, на множестве $D_0 - D_{\lambda(\varepsilon)}$ будем иметь

$$\Big| \int\limits_{D_0 - D_{\lambda(\varepsilon)}} [f(u) - f(x)]\, \varphi_{\mathfrak{x}}(u, x)\, d_u\tau_m \Big| < \varepsilon. \quad (16)$$

Из (13) и (16) получаем

$$\Big| \int\limits_{A} [f(u) - f(x)]\, \varphi_{\mathfrak{x}}(u, x)\, d_u\tau_m \Big| = \Big| \int\limits_{D_0} [f(u) - f(x)]\, \varphi_{\mathfrak{x}}(u, x)\, d_u\tau_m \Big| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon [K(x) + 1] \text{ при } \mathfrak{x} \succ \mathfrak{x}_1(x, \varepsilon). \quad (17)$$

Но это, очевидно означает, что

$$\lim_{(\mathfrak{D})} \int\limits_{A} [f(u) - f(x)]\, \varphi_{\mathfrak{x}}(u, x)\, d_u\tau_m = 0. \quad (18)$$

Теорема доказана.

Доказанная теорема дает возможность с единой точки зрения устанавливать факт сходимости к $f(x)$ в точках существования производной неопределенного интеграла от $f(u)$, равной $f(x)$, ряда конкретных многомерных сингулярных интегралов классических типов, таких как интеграл Тонелли [7] (для которого данный факт устанавливается здесь, по-видимому, впервые), а также и других интегралов, еще не рассматривавшихся в литературе или подвергавшихся в каждом отдельном случае особому исследованию.

Названный интеграл Тонелли имеет вид

$$I_n(x) = \frac{1}{k_n} \int\limits_{A} f(u) \left[1 - \sum_{i=1}^{m} (u_i - x_i)^2 \right]^n d_u\tau_m = \int\limits_{A} f(u)\, \varphi_n(u, x)\, d_u\tau_m$$

$\left(x \text{ — внутренняя точка множества } A = \left\{ u \mid 0 \leqslant u_i \leqslant \frac{1}{\sqrt{m}},\ i = \overline{1, m} \right\} \right)$. Этот интеграл сходится к функции $f(x)$ во всех точках $x \in \mathrm{Int}^*(A)$, где производная неопределенного интеграла функции $f(u)$ равна $f(x)$.

В качестве регулярного семейства здесь будет гомотетическое семейство гиперсфер $\sum_{i=1}^{m} (u_i - x_i)^2 \leqslant r^2 q^{2\lambda}$, где r обозначает супремум евклидова расстояния от x до точек $u \in A$.

Вторым примером применения обобщенной теоремы П. И. Романовского может служить метод суммирования двойных рядов Фурье сферическими средними Рисса [6], ибо этот метод связан с сингулярным ядром вида

$$\varphi_t = \begin{cases} \frac{c}{t^2} \left(1 - \frac{s^2}{t^2} \right)^{p-1} & \text{при } s^2 < t^2, \\ 0 & \text{при } s^2 \geqslant t^2, \end{cases} \tag{19}$$

где $s^2 = (u_1 - x_1)^2 + (u_2 - x_2)^2$, t — радиус сферы, $\mathfrak{x} = t \to 0$.

При $p > 1$ ядро φ_t удовлетворяет условиям указанного здесь обобщения теоремы П. И. Романовского, следовательно, сферические средние Рисса сходятся к суммируемой функции $f(x)$ во всех точках, где эта функция равна производной своего неопределенного интеграла.

На основании частного рассмотрения, примененного к данному специфическому виду ядра (19), указанный характер сходимости для последнего примера был недавно установлен М. А. Духовным [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, 1957.
2. Є. Я. Ремез, Співіснуючі величини та поняття границі в математичному аналізі, Наук. зап. Київськ. держ. пед. ін-ту, **6**, 1948.
3. Є. Я. Ремез, Про Лебегові точки функцій та про збіжність одного важливого класу многовимірних сингулярних інтегралів, Наук. зап. Київськ. держ. ун-ту, **X**, вип. 1, № 5, 1951.
4. П. И. Романовский, Quelques considérations sur la théorie des intégrales singulières, M. Z., Bd. 34, H. 1, 1931.
5. С. Сакс, Теория интеграла, ИЛ, М., 1949.
6. K. Chandrasekharan, On the summation of multiple Fourier series, Proc. London Math. Soc., **50**, part 3, 1948.
7. L. Tonelli, Sulla rappresentatione analitica delle funzioni di piu variabli reali, Rend. Circ. Mat. Palermo, 1910.
8. C. de la Vallee Poussin, Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire, Paris, 1934.
9. М. А. Духовный, Распространение теоремы П. И. Романовского на один класс двойных сингулярных интегралов, УМЖ, т. XVII, № 2, 1965.

Поступила 22.IX 1964 г.
Киев