Время пребывания полумарковского процесса в фиксированном множестве состояний

В. С. Королюк

Функционирование различных систем, рассматриваемых в теории массового обслуживания и теории надежности, может быть описано соответствующим образом построенным полумарковским процессом с конечным числом состояний [1, 2, 3]. При этом некоторые задачи теории массового обслуживания и теории надежности сводятся к определению времени пребывания полумарковского процесса в фиксированном подмножестве состояний.

В настоящей работе указанная задача сводится к решению стохастических уравнений.

1. Определим полумарковский процесс следующим образом. Пусть $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ — конечное множество состояний полумарковского процесса. Времена пребывания ξ_i полумарковского процесса в i-м состоянии — независимые неотрицательные случайные величины с невырожденными функциями распределения

$$P_i(t); \quad P_i(+0)<1, \quad P_i(+\infty)=1 \qquad (1 \leqslant i \leqslant m).$$

$q_{ij}(t)$ — условные вероятности перехода из i-го в j-е состояние при условии, что $\xi_i=t$; $\sum_{j=1}^{m} q_{ij}(t)\equiv 1$; $q_{ij}(t)$ — измеримые функции ξ_i с конечным математическим ожиданием

$$p_{ij}=\mathbf{M}q_{ij}(\xi_i)=\int_0^\infty q_{ij}(t)\,dP_i(t); \qquad \sum_{j=1}^{m} p_{ij}=1. \tag{1}$$

При фиксированном начальном состоянии дальнейшее поведение полумарковского процесса полностью определяется заданными функциями распределения $P_i(t)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ и матрицей условных вероятностей $\{q_{ij}(t);\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant m\}$.

В частности, при

$$P_i(t)=\begin{cases} 0, & t \leqslant 1 \\ 1, & t>1 \end{cases},$$

полумарковский процесс является однородной дискретной цепью Маркова с матрицей вероятностей перехода $\{p_{ij}=q_{ij}(1),\ 1 \leqslant i, j \leqslant m\}$ при

$$q_{ij}(t)\equiv q_{ij}; \quad P_i(t)=1-e^{-\lambda_i t} \qquad (\lambda_i>0)$$

соответствующий полумарковский процесс является однородной цепью Маркова с непрерывным временем.

Введем переходные вероятности

$$P_{ij}(t)=\int_0^t q_{ij}(u)\,dP_i(u) \qquad (1 \leqslant i, j \leqslant m); \qquad \sum_{j=1}^{m} P_{ij}(t)=P_i(t) \tag{2}$$

и случайные величины σ_{ij} — индикаторы перехода из i-го в j-е состояние:

$$\sigma_{ij}=\sigma_j(\xi_i)=\begin{cases} 1 \text{ с вероятностью } q_{ij}(\xi_i), \\ 0 \text{ с вероятностью } 1-q_{ij}(\xi_i). \end{cases} \tag{3}$$

Так что (см. [1])*

$$\mathbf{M}\sigma_{ij}=\mathbf{M}\mathbf{M}_{\xi_i}\sigma_{ij}=\mathbf{M}q_{ij}(\xi_i)=p_{ij}. \tag{4}$$

2. Пусть теперь E_1 — некоторое фиксированное подмножество состояний полумарковского процесса: $E_1 \subset E$; E_0 — дополнение к $E_1: E=E_1 \cup E_0$. Очевидно, что время пребывания полумарковского процесса в E_1 зависит от того, в каком начальном состоянии он находится.

Обозначим τ_i время пребывания полумарковского процесса в множестве состояний E_1 с началом в i-м состоянии. Из определения полумарковского

* Символ $\mathbf{M}_\xi$ означает условное математическое ожидание при фиксированном ξ.

процесса следует, что при переходе из i-го в j-е состояние дальнейшее поведение процесса зависит только от времени пребывания его в j-м состоянии. Это замечание дает возможность составить следующую систему стохастических уравнений для τ_i*:

$$\tau_i = \xi_i + \sum_{j \in E_1} \sigma_{ij} \tau'_j \qquad (i \in E_1). \tag{5}$$

Здесь τ_i, τ'_i при каждом i независимы и одинаково распределены; ξ_i, τ'_j и σ_{ij}, τ'_j попарно независимы.

Обозначим

$$a_i = \mathbf{M}\xi_i; \quad m_i = \mathbf{M}\tau_i; \quad T_i(s) = \mathbf{M}e^{s\tau_i} \qquad (\operatorname{Re} s < 0). \tag{6}$$

Переходя к математическим ожиданиям в (5) и учитывая (4), получим систему алгебраических уравнений для определения m_i — среднего времени пребывания полумарковского процесса в E_1 с началом в i-м состоянии:

$$m_i = a_i + \sum_{j \in E_1} p_{ij} m_j \qquad (i \in E_1). \tag{7}$$

Решение системы (7) существует, если матрица $\{p_{ij};\ i, j \in E_1\}$ полустохастическая, т. е. хотя бы при одном i $\sum_{j \in E_1} p_{ij} < 1$.

Для определения производящих функций $T_i(s)$ воспользуемся соотношением:

$$e^{s\sum_j \sigma_{ij}\tau_j} = 1 + \sum_j \sigma_{ij} (e^{s\tau_j} - 1), \tag{8}$$

которое имеет место в силу свойств индикаторов σ_{ij}

$$\sigma_{ij} \cdot \sigma_{ik} = \delta_{jk} \sigma_{ij}; \tag{9}$$

δ_{jk} — символ Кронекера: $\delta_{jk} = 0$ при $j \neq k$, $\delta_{kk} = 1$.

Теперь из (5) и (8) имеем

$$\mathbf{M}e^{s\tau_i} = \mathbf{M}e^{s\xi_i} + \sum_{j \in E_1} [\mathbf{M}(\sigma_{ij} e^{s(\xi_i + \tau'_j)}) - \mathbf{M}(\sigma_{ij} e^{s\xi_i})]. \tag{10}$$

Обозначим (см. [2, 3])

$$p_{ij}(s) = \int_0^\infty e^{st} dP_{ij}(t) = \int_0^\infty e^{st} q_{ij}(t)\, dP_i(t) = \mathbf{M}(\sigma_{ij} e^{s\xi_i}); \tag{11}$$

$$p_i(s) = \int_0^\infty e^{st} dP_i(t) = \mathbf{M}e^{s\xi_i} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(s). \tag{12}$$

Соотношение (10) можно переписать, учитывая независимость ξ_i и τ'_j

$$T_i(s) = p_i(s) + \sum_{j \in E_1} p_{ij}(s) (T_j(s) - 1) \qquad (i \in E_1). \tag{13}$$

---

* Система (5) является аналогом формулы полной вероятности для случайных величин. Равенство в (5) понимается в том смысле, что случайные величины, стоящие слева и справа от знака равенства, одинаково распределены.

Итак, окончательно имеем систему линейных алгебраических уравнений для определения $T_i(s)$:

$$\sum_{j\in E_1}(p_{ij}(s)-\delta_{ij})T_j(s)=-\sum_{j\in E_0}p_{ij}(s) \qquad (i\in E_1). \tag{14}$$

Эта система разрешима при тех же условиях, что и (5). Заметим, что $p_{ij}(0)=p_{ij}$ (см [1]).

3. Рассмотрим два примера. Пусть система S_1 состоит из двух однотипных приборов, работающих независимо, и одного восстанавливающего устройства. Пусть время работы ζ каждого прибора и время восстановления η распределены по показательному закону с параметрами λ и μ соответственно.

Задача состоит в определении времени непрерывной работы приборов системы или времени работы восстанавливающего устройства (см. [3]).

Функционирование такой системы описывается следующим полумарковским процессом.

Состояния и времена пребывания:

e_0 — оба прибора работают. Время пребывания в e_0 — $\xi_0=\min(\zeta_1,\zeta_2)$; ζ_1, ζ_2 — независимые показательно распределенные случайные величины с параметром λ, так что $P_0(t)=1-e^{-2\lambda t}$.

e_1 — один прибор работает, другой восстанавливается. Время пребывания в e_1 — $\xi_1=\min(\zeta,\eta)$; $P_1(t)=1-e^{-(\lambda+\mu)t}$.

e_2 — оба прибора не работают: один из них восстанавливается, другой ожидает освобождения восстанавливающего устройства. Время пребывания в e_2 — $\xi_2=\eta$; $P_2(t)=1-e^{-\mu t}$.

Условные вероятности перехода $q_{ij}(t)$:

$$q_{01}(t)=q_{21}(t)\equiv 1;\ q_{10}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu};\ q_{12}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}. \tag{15}$$

Первое из соотношений (15) очевидно: из состояния e_0 и e_2 с вероятностью 1 происходит переход в состояние e_1. Далее, $q_{10}(t)$ — условная вероятность того, что работающий прибор не выйдет из строя за время t при условии, что $\xi_1=t$, т. е.

$$q_{10}(t)=\boldsymbol{P}\{\zeta>t/\xi_1=t\}=\boldsymbol{P}\{\zeta>t/\min(\zeta,\eta)=t\}=\frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

Переходные вероятности $P_{ij}(t)$ и p_{ij}:

$$P_{01}(t)=P_0(t);\qquad P_{21}(t)=P_2(t);$$

$$P_{10}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}P_1(t);\qquad P_{12}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}P_1(t); \tag{16}$$

$$p_{01}=p_{21}=1;\qquad p_{10}=\frac{\mu}{\lambda+\mu};\qquad p_{12}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

Для определения времени непрерывной работы приборов системы выберем $E_1=\{e_0,e_1\}$. Тогда из уравнений (7) легко определяется m_0 — среднее время непрерывной работы приборов системы, начиная с момента освобождения восстанавливающего устройства:

$$m_0=\frac{a_0+a_1}{1-p_{10}}, \tag{17}$$

где

$$a_0=\mathbf{M}\xi_0=\frac{1}{2\lambda};\qquad a_1=\mathbf{M}\xi_1=\frac{1}{\lambda+\mu};\qquad p_{10}=\frac{\mu}{\lambda+\mu}. \tag{18}$$

Так что,

$$m_0 = \frac{3}{2\lambda} + \frac{\mu}{2\lambda^2}. \tag{19}$$

Второе слагаемое в (19) определяет эффект восстановления.

Нетрудно найти также производящую функцию $T_0(s) = \mathbf{M}e^{s\tau_0}$, решая систему уравнений (14) в данном случае:

$$T_0(s) = p_0(s)\frac{p_{12}(s)}{1 - p_0(s)\,p_{10}(s)}, \tag{20}$$

где

$$p_0(s) = \mathbf{M}e^{s\xi_0} = \frac{2\lambda}{2\lambda - s}; \qquad p_{10}(s) = \frac{\mu}{\lambda + \mu - s}; \qquad p_{12}(s) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu - s}. \tag{21}$$

Аналогично определяется время непрерывной работы восстанавливающего устройства (период занятости). В этом случае следует положить $E_1 = \{e_1, e_2\}$.

Пусть система S_2 состоит из двух приборов, работающих поочередно в условиях холодного резерва, и двух восстанавливающих устройств. Пусть времена работы ζ_1, ζ_2 и восстановления η_1, η_2 приборов системы —независимые случайные величины с функциями распределения $P_1(t)$, $P_2(t)$ и $G_1(t)$, $G_2(t)$ соответственно.

Определим время непрерывной работы приборов системы (см. [4, 5]). Функционирование такой системы до выхода обоих приборов из строя описывается следующим полумарковским процессом.

Состояния и времена пребывания:

e_0 — начальное состояние: работает первый прибор, второй находится в холодном разерве. Время пребывания в e_0 — $\xi_0 = \zeta_1$.

e_1 — работает первый прибор; в момент его включения второй прибор восстанавливается. Время пребывания в e_1 — $\xi_1 = \zeta_1$.

e_2 — работает второй прибор; в момент его включения первый прибор восстанавливается. Время пребывания в e_2 — $\xi_2 = \zeta_2$.

e_3 — оба прибора восстанавливаются.

Условные вероятности перехода $q_{ij}(t)$:

$$\begin{gathered} q_{02}(t) \equiv 1; \qquad q_{21}(t) = G_1(t); \qquad q_{23}(t) = 1 - G_1(t); \\ q_{12}(t) = G_2(t); \qquad q_{13}(t) = 1 - G_2(t). \end{gathered} \tag{22}$$

Первое из соотношений (22) очевидно. Далее, условная вероятность $q_{21}(t)$ перехода из e_2 в e_1 при условии, что $\xi_2 = \zeta_2 = t$, равна вероятности того, что время восстановления первого прибора η_1 меньше t. Аналогичные рассуждения приводят к остальным соотношениям (22).

Переходные вероятности $P_{ij}(t)$ и p_{ij}:

$$\begin{gathered} P_{01}(t) = P_1(t); \qquad P_{21}(t) = \int_0^t G_1(u)\,dP_2(u); \qquad P_{12}(t) = \int_0^t G_2(u)\,dP_1(u); \\ p_{01} = 1; \qquad p_{21} = \boldsymbol{P}\{\eta_1 < \zeta_2\}; \qquad p_{12} = \boldsymbol{P}\{\eta_2 < \zeta_1\}. \end{gathered} \tag{23}$$

Система S_2 находится в рабочем состоянии, если построенный полумарковский процесс находится в $E_1 = \{e_0, e_1, e_2\}$.

Таким образом, решая системы уравнений (7) и (14) при заданных (22) и (23), получим для времени τ_0 непрерывной работы системы S_2 среднее значение m_0 и производящую функцию $T_0(s) = \mathsf{M}e^{s\tau_0}$:

$$m_0 = a_1 + \frac{a_2 + p_{21}a_1}{1 - p_{21}\cdot p_{12}}; \qquad a_1 = \mathbf{M}\xi_1; \qquad a_2 = \mathbf{M}\xi_2; \tag{24}$$

$$T_0(s) = p_1(s)\,\frac{p_{23}(s) + p_{21}(s)\,p_{13}(s)}{1 - p_{21}(s)\,p_{12}(s)}. \tag{25}$$

Автор весьма признателен А. В. Скороходу за полезное обсуждение настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Levy, Systémes semi-markoviens à an plus une infinite dènombrable d'ètats possibles, Proceedings of the international congress of mathematicians, v. 2, Amsterdam, 1954, 294—295.
2. R. Pyke, Markov renewal processes: difinitions and preliminary properties, Ann. Math. Stat., 32, № 4, 1961.
3. Ю. К. Беляев, Линейчатые марковские процессы и их приложение к задачам теории надежности, Тр. VI Всесоюзн. совещ. по теор. вероятн. и матем. статистике, Вильнюс, 1962.
4. Б. В. Гнеденко, О ненагруженном дублировании, Изв. АН СССР, техническая кибернетика, 4, 1964, 3—13.
5. А. Ф. Зубова, О холодном дублировании с восстановлением при любом законе распределения потока отказов и времени восстановления, Изв. АН СССР, техническая кибернетика, 5, 1964, 107—111.

Поступила 25.II 1965 г.
Киев