Алгоритм для вычисления спектрального радиуса произвольной матрицы

Ю. И. Любич

Пусть A — произвольная комплексная квадратная матрица некоторого порядка p. Спектральным радиусом матрицы называется наибольший модуль $r(A)$ ее собственных чисел.

Рассмотрим кольцо $\mathfrak{M}_p$ всех комплексных квадратных матриц p-го порядка и введем в нем какую-нибудь норму. Норма в $\mathfrak{M}_p$ обязана обладать, кроме обычных свойств векторной нормы, еще и «кольцевым» свойством

$$\| ST \| \leqslant \| S \| \| T \| \qquad (S, T \in \mathfrak{M}_p).$$

Примером такой нормы может служить

$$\| T \|_0 = \sum_{i,k=1}^{p} | t_{ik} |, \tag{1}$$

а также любая норма, подчиненная той или иной норме p-мерных векторов, например,

$$\| T \|_1 = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} \sum_{k=1}^{p} | t_{ik} | \tag{2}$$

(см. [1], стр. 122 — 129).

Основой предлагаемого нами алгоритма для вычисления величины $r(A)$ является хорошо известная в теории нормированных колец (см. [2], стр. 27) формула Гельфанда

$$r(A) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\| A^n \|}. \tag{3}$$

Хотя формула (3) порождает процесс

$$r_n = \sqrt[n]{\| A^n \|} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{4}$$

сходящийся к $r(A)$, однако она еще не дает вычислительного алгоритма до тех пор, пока нет эффективного способа оценки погрешности приближений r_n.

Заметим, что поскольку для любой матрицы спектральный радиус не превышает нормы ([1], стр. 130), то

$$[r(A)]^n \leqslant \| A^n \|,$$

откуда

$$r(A) \leqslant r_n. \tag{5}$$

Таким образом, процесс (4) сходится к $r(A)$ сверху. Отсюда возникает идея построить дополнительно какой-нибудь сходящийся к $r(A)$ процесс нижних приближений. Комбинированный процесс будет уже эффективным.

Намеченная цель достигается путем некоторой модификации метода Лобачевского. Окончательная конструкция алгоритма диктуется не только требованием формальной эффективности, но и требованием достаточного быстродействия.

Прежде всего оценим скорость сходимости в (3), используя специфику элементов кольца $\mathfrak{M}_p$.

Теорема 1.

$$r_n \leqslant r(A) + O\left(\frac{\ln n}{n}\right). \tag{6}$$

Доказательство. Будем в начале пользоваться нормой (1).

Пусть

$$A = TBT^{-1}, \tag{7}$$

где B — матрица, имеющая нормальную форму Жордана, T — неособенная матрица. Пусть

$$B = I_1 \dot{+} I_2 \dot{+} \ldots \dot{+} I_\omega,$$

где I_k — жордановы клетки; порядок клетки I_k обозначим через q_k. Тогда

$$B^n = I_1^n \dot{+} I_2^n \dot{+} \ldots \dot{+} I_\omega^n$$

и

$$\| B^n \|_0 = \sum_{k=1}^{\omega} \| I_k^n \|_0. \tag{8}$$

Но I_k^n имеет вид

$$I_k^n = \begin{pmatrix} \mu_k^n & \binom{n}{1}\mu_k^{n-1} & \binom{n}{2}\mu_k^{n-2} & \ldots & \binom{n}{q_k-1}\mu_k^{n-q_k+1} \\ 0 & \mu_k^n & \binom{n}{1}\mu_k^{n-1} & \ldots & \binom{n}{q_k-2}\mu_k^{n-q_k+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mu_k^n \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\| I_k^n \|_0 = \sum_{i=0}^{q_k-1} (q_k - i)\binom{n}{i}\mu_k^{n-i}$$

и при $n \geqslant 2(q_k - 1)$ (т. е. при $n \geqslant 2p - 2$ — заведомо)

$$\| I_k^n \|_0 \leqslant n^{q_k - 1} |\mu_k|^n \sum_{i=0}^{q_k-1} \frac{q_k - i}{i! \, |\mu_k|^i} \leqslant C n^{p-1} [r(A)]^n, \tag{9}$$

где*

$$C = \max_{\substack{1 \leqslant k \leqslant \omega \\ \mu_k \neq 0}} \sum_{i=0}^{q_k-1} \frac{q_k - i}{i! \, |\mu_k|^i}.$$

Из (7) — (9) следует

$$\| A^n \|_0 \leqslant C\omega \| T \|_0 \| T^{-1} \|_0 n^{p-1} [r(A)]^n.$$

Если возьмем теперь любую другую норму в $\mathfrak{M}_p$, то, как известно, найдется такая константа N, что

$$\| T \| \leqslant N \| T \|_0 \qquad (T \in \mathfrak{M}_p).$$

Поэтому

$$\| A^n \| \leqslant \alpha n^{p-1} [r(A)]^n,$$

где

$$\alpha = NC\omega \| T \|_0 \| T^{-1} \|_0.$$

Отсюда

$$r_n \leqslant r(A) \sqrt[n]{\alpha n^{p-1}} = r(A) + O\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

что и требовалось.

Замечание. Из промежуточного неравенства (9) видно, что если собственным числам матрицы A, лежащим на окружности $|\lambda| = r(A)$ (будем называть их граничными собственными числами), соответствует простая жорданова структура**, то оценку (6) можно заменить лучшей оценкой

$$r_n \leqslant r(A) + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{6'}$$

Однако на всем $\mathfrak{M}_p$ $(p \geqslant 2)$ оценка (6) по порядку точна. Действительно, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

то

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

откуда

$$\sqrt[n]{\| A^n \|_0} = \sqrt[n]{n + p} > 1 + \frac{\ln n}{n} = r(A) + \frac{\ln n}{n}.$$

---

* $C = 0$, если $\mu_k = 0$ $(1 \leqslant k \leqslant \omega)$.

** Т. е. только одномерные клетки.

Построим теперь нижние приближения к $r(A)$. С этой целью положим

$$\varrho_n = \sqrt[n]{\frac{1}{p}\,|\operatorname{Sp} A^n|} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{10}$$

Так как, очевидно,

$$|\operatorname{Sp} A^n| \leqslant p\,[r(A)]^n,$$

то

$$\varrho_n \leqslant r(A). \tag{11}$$

К сожалению, последовательность $\{\varrho_n\}_1^\infty$ в общем случае не только не стремится к $r(A)$, но и вовсе может не иметь предела. Например, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$A^p = E,$$

откуда

$$\varrho_n = \sqrt[n]{\frac{1}{p}\left|\sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2kn\pi i}{p}}\right|} = \begin{cases} 1 & n \equiv 0 \pmod p, \\ 0 & n \equiv 1 \pmod p. \end{cases}$$

Однако

$$\varlimsup_{n\to\infty} \varrho_n = r(A) \tag{12}$$

не только в указанном примере, но и вообще. Более того, справедливо следующее предложение.

Теорема 2. *Пусть s — число (без учета кратностей) граничных собственных чисел матрицы A. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} (\max_{0\leqslant k\leqslant s-1} \varrho_{n+k}) = r(A) \tag{13}$$

и даже точнее

$$\max_{0\leqslant k\leqslant s-1} \varrho_{n+k} \geqslant r(A) - O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{14}$$

Доказательство. Пусть

$$re^{i\varphi_1}, \ldots, re^{i\varphi_s} \qquad (r = r(A))$$

— граничные собственные числа матрицы A,

$$\nu_1, \ldots, \nu_s$$

— их кратности в характеристическом уравнении. Очевидно,

$$|\operatorname{Sp} A^n| \geqslant r^n \left|\sum_{j=1}^{s} \nu_j e^{in\varphi_j}\right| - p\mu^n,$$

где μ — наибольший модуль остальных собственных чисел. Следовательно,

$$\varrho_n \geqslant r\sqrt[n]{\frac{1}{p}\,|\sigma_n| - \delta^n}, \tag{15}$$

где

$$\delta = \frac{\mu}{r} < 1, \qquad \sigma_n = \sum_{j=1}^{s} \nu_j e^{in\varphi_j}.$$

Система равенств

$$\sum_{j=1}^{s} \nu_j e^{in\varphi_j} e^{ik\varphi_j} = \sigma_{n+k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, s-1)$$

разрешима относительно величин $\nu_j e^{in\varphi_j}$ $(j = 1, 2, \ldots s)$, ибо матрица

$$V = (e^{ik\varphi_j})_{0 \leqslant k \leqslant s-1,\ 1 \leqslant j \leqslant s}$$

неособенная. Имеем:

$$\nu = \max_{1 \leqslant j \leqslant s} |\nu_j| = \max_{1 \leqslant j \leqslant s} |\nu_j e^{in\varphi_j}| \leqslant \| V^{-1} \|_1 \max_{0 \leqslant k \leqslant s-1} |\sigma_{n+k}|,$$

откуда

$$\max_{0 \leqslant k \leqslant s-1} |\sigma_{n+k}| \geqslant \frac{\nu}{\| V^{-1} \|_1}. \tag{16}$$

В силу (15), (16) и (11) получаем оценку

$$\max_{0 \leqslant k \leqslant s-1} \varrho_{n+k} \geqslant r \sqrt[n]{a - \delta^n},$$

где

$$a = \frac{\nu}{p \| V^{-1} \|_1} \leqslant 1.$$

Остается учесть, что

$$\sqrt[n]{a - \delta^n} = 1 - O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Следствие 1.

$$\max_{0 \leqslant k \leqslant p-1} \varrho_{n+k} \geqslant r(A) - O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{17}$$

Следствие 2.

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \varrho_k \geqslant r(A) - O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{18}$$

Следствие 3. *Если матрица* A *обладает только одним (без учета кратности) граничным собственным числом, то*

$$\varrho_n \geqslant r(A) - O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{19}$$

В частности, под следствие 3 подпадают: 1) матрицы с неотрицательным спектром, например самосопряженные неотрицательные матрицы; 2) матрицы с неотрицательными элементами, примитивные в смысле Фробениуса (см., например, [3], стр. 345), в частности матрицы с положительными элементами. Во всех этих случаях единственным граничным собственным числом является $\lambda = r(A)$, и, между прочим, ему соответствует простая жорданова структура, вследствие чего будет иметь место не только оценка (19), но и оценка(6′).

Теперь нетрудно указать алгоритм для вычисления $r(A)$. Будем последовательно вычислять степени матрицы

$$A^n \, (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

по ним — величины r_n, ϱ_n, согласно формулам (4), (10) соответственно, и, наконец, — рекуррентно

$$\widetilde{r}_n = \min(\widetilde{r}_{n-1}, r_n),\ \widetilde{\varrho}_n = \max(\widetilde{\varrho}_{n-1}, \varrho_n) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

при начальных условиях

$$\widetilde{r}_0 = \infty,\ \widetilde{\varrho}_0 = 0.$$

Последовательности $\{\widetilde{r}_n\}_1^\infty$, $\{\widetilde{\varrho}_n\}_1^\infty$ будут монотонно сходиться к $r(A)$ сверху и снизу соответственно. Вычисляемая на каждом шаге оценка погрешности

$$\delta_n = \widetilde{r}_n - \widetilde{\varrho}_n$$

дает возможность распознать достижение наперед назначенной точности.

В силу (6) и (18) будет

$$\delta_n = O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Так как эта оценка точна по порядку, то процесс оказывается весьма медленно сходящимся. Поэтому мы его модифицируем.

Будем вычислять степени матрицы A не подряд, а с некоторыми пропусками. Здесь возможны различные «стратегии»; мы ограничимся рассмотрением одной из них, точнее — некоторого однопараметрического семейства стратегий.

Зададим целое $q \geqslant 1$ и будем вычислять лишь те степени матрицы A, показатели которых входят в таблицу

$$\begin{array}{c}
1, 2, \ldots, 2^{q-1};\ 2^{q-1}+1,\ 2^{q-1}+2, \ldots,\ 2^{q-1}+p-1,\\
2^q, 2^{q+1}, \ldots, 2^{2q-1};\ 2^{2q-1}+1,\ 2^{2q-1}+2, \ldots, 2^{2q-1}+p-1,\\
2^{2q}, 2^{2q+1}, \ldots, 2^{3q-1};\ 2^{3q-1}+1,\ 2^{3q-1}+2, \ldots, 2^{3q-1}+p-1,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Каждая строка таблицы образует «большой цикл» процесса, состоящий из двух «малых циклов»: цикла квадрирования и цикла возведения в последовательные степени. В k-м большом цикле будем вычислять величины

$$\widehat{r}_k = r_{n_k},\ \ \widehat{\varrho}_k = \max(\varrho_{n_k}, \varrho_{n_k+1}, \ldots, \varrho_{n_k+p-1}) \qquad (n_k = 2^{kq-1})$$

и оценку погрешности

$$\Delta_k = \widehat{r}_k - \widehat{\varrho}_k.$$

Последовательность $\{\widehat{r}_k\}_1^\infty$ монотонна, так как

$$\sqrt[2m]{\| A^{2m} \|} \leqslant \sqrt[m]{\| A^m \|} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

и сходится к $r(A)$ сверху. Последовательность $\{\widehat{\varrho}_k\}_1^\infty$ сходится к $r(A)$ снизу (вообще говоря, уже не монотонно).

В силу (6) и (17) будет

$$\Delta_k = O\left(\frac{k}{2^{kq}}\right).$$

Так как число возведений матрицы в степень, выполняемое в течение k больших циклов, равно

$$N_k = k(q + p - 1),$$

то

$$\Delta_k = O\left(N_k \cdot 2^{-\frac{qN_k}{q+p-1}}\right), \tag{20}$$

и эта оценка точна по порядку.

Рассмотрим знаменатель сходимости, т. е.

$$Q = \sup_A \left(\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[N_k]{\Delta_k}\right).$$

В силу (20) и точности этой оценки,

$$Q = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{q}{q+p-1}}, \tag{21}$$

откуда видно, что

$$\frac{1}{2} < Q < 1,$$

причем, выбирая q достаточно большим, можно сделать знаменатель сходимости сколь угодно близким к $\frac{1}{2}$. Таким образом, *для сколь угодно большого порядка p матрицы A и для любого ε, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, существует стратегия, обеспечивающая сходимость со скоростью не медленее геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{2} + \varepsilon$.*

Из формулы (21) видно также, что знаменатель сходимости убывает при увеличении относительной длительности цикла квадрирования в большом цикле.

При наличии дополнительной информации о матрице алгоритм можно в некотором смысле ускорить. Именно, если известно число s граничных собственных значений (без учета кратностей), то в силу (14) можно сократить циклы возведения в последовательные степени до длины $s-1$, действуя в остальном так же, как и раньше. Тогда знаменатель сходимости будет равен

$$Q_s = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{q}{q+s-1}}. \tag{22}$$

В частности, при $s = 1$ (например, в ситуациях, описанных на стр. 132), получается процесс чистого квадрирования, в котором $q = 1$ и

$$\widehat{r_k} = \sqrt[2^k]{\|A^{2^k}\|}, \quad \widehat{\varrho_k} = \sqrt[2^k]{\frac{1}{p}|\operatorname{Sp} A^{2^k}|} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Величины $\widehat{\varrho_k}$, фигурирующие здесь, отличаются лишь коэффициентом $\frac{1}{p}$ под знаком корня от приближений по Лобачевскому. Знаменатель сходимости достигает при $s = 1$ оптимального значения

$$Q_1 = \frac{1}{2},$$

а в упомянутых выше специальных ситуациях даже будет

$$\Delta_k = O(2^{-k}),$$

вследствие оценки (6′).

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. К. Фадеев и В. Н. Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, М., 1960.
2. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов, Коммутативные нормированные кольца, Физматгиз, М., 1960.
3. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Гостехиздат, М., 1953.

Поступила 30.V 1964 г.
Харьков