Приближенное интегрирование задачи Гурса для общей 2 *n*-волновой системы дифференциальных уравнений методом двухстороннего приближения

Ю. И. Ковач

Пусть задана система

$$\frac{\partial^{2n_i} U_i(x, y)}{\partial x^{n_i} \partial y^{n_i}} = f_i [U_1, U_2, \ldots, U_m], \tag{1}$$

где

$$f_i [U_1, U_2, \ldots, U_m] = f_i \left(x, y, U_1, U_{1x}, \ldots, \frac{\partial^{2n_1 - 1} U_1}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}}, \ldots, \right.$$

$$\left. U_m, U_{mx}, \ldots, \frac{\partial^{2n_m - 1} U_m}{\partial x^{\tau_1} \partial y^{\tau_2}} \right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; k_1, k_2, \ldots, \tau_1, \tau_2 = 0, 1, 2, \ldots, n_i).$$

Рассмотрим задачу Гурса для системы (1), ограничиваясь для простоты нулевыми данными на характеристиках $x = x_0$, $y = y_0$:

$$\frac{\partial^{2k-2} U_i(x_0, y)}{\partial x^{k-1} \partial y^{k-1}} = \frac{\partial^{2k-2} U_i(x, y_0)}{\partial x^{k-1} \partial y^{k-1}} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n_i). \tag{2}$$

Постановка задачи Гурса. В области $\overline{R} = \{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \alpha, y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + \beta;\ \alpha > 0,\ \beta > 0\}$ найти приближенное решение системы (1) с данными на характеристиках (2).

Полагаем, что в некоторой области $\overline{D}$, проекция которой на плоскость xoy дает область $\overline{R}$, функции f_i непрерывны и имеют все непрерывные частные производные первого порядка; кроме того, первые производные по аргументам U_j, U_{jx}, $U_{jy}, \ldots$ при $(x, y) \in \overline{R}$ удовлетворяют условиям

$$f_{iU_j} \geqslant 0, \quad f_{iU_{jx}} \geqslant 0, \quad f_{iU_{jy}} \geqslant 0, \quad f_{iU_{jxx}} \geqslant 0, \ldots \tag{3}$$

При условиях (3) для задачи Гурса (1), (2) справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть при $(x, y) \in \overline{R}$ существует система непрерывных функций $V_i(x, y)$ $(Z_i(x, y))$, имеющих непрерывные производные всех тех порядков, которые входят в систему дифференциальных уравнений* (1) *и удовлетворяющих начальным условиям* (2), *а результат подстановки их в систему* (1) *дает в замкнутой области $\overline{R}$ невязки $\gamma_i(x, y) \leqslant 0$ $(\gamma_i(x, y) \geqslant 0)$. Тогда при $(x, y) \in \overline{R}$ справедливы неравенства*

$$V_i(x, y) \leqslant U_i(x, y) \leqslant Z_i(x, y), \ldots,$$

$$\frac{\partial^{r_i} V_i(x, y)}{\partial x^{s_i} \partial y^{m_i}} \leqslant \frac{\partial^{r_i} U_i(x, y)}{\partial x^{s_i} \partial y^{m_i}} \leqslant \frac{\partial^{r_i} Z_i(x, y)}{\partial x^{s_i} \partial y^{m_i}} \quad (s_i + m_i = r_i \leqslant 2n_i; s_i, \tag{4}$$

$$m_i = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n_i).$$

Доказательство теоремы разобьем на три части.

1. Докажем, что можно построить последовательности функций $\{V_{ik}\}$ ($\{Z_{ik}\}$) такие, что всюду в $\bar{R}$ будет $V_{ik} \leqslant V_{ik+1} (Z_{ik} \geqslant Z_{ik+1})$, определяемые из системы

$$\begin{gathered} \frac{\partial^{2n_i} V_{ik+1}}{\partial x^{n_i} \partial y^{n_i}} = f_i [V_{1k}, V_{2k}, \ldots, V_{mk}] = \varphi_i(x, y), \\ \frac{\partial^{2n_i} Z_{ik+1}}{\partial x^{n_i} \partial y^{n_i}} = f_i [Z_{1k}, Z_{2k}, \ldots, Z_{mk}] = \omega_i(x, y) \qquad (k = 1,\ 2, \ldots), \end{gathered} \tag{5}$$

где $V_i = V_{i1}$, $Z_i = Z_{i1}$, при начальных условиях (2) на характеристиках. Решение системы (5) при начальных условиях (2) дается формулами [1]:

$$\begin{gathered} V_{ik+1}(x, y) = \int_{x_0}^{x} dt \int_{y_0}^{y} \frac{(x-t)^{n_i - 1}}{(n_i - 1)!} \frac{(y-\tau)^{n_i - 1}}{(n_i - 1)!} \varphi_i(t, \tau)\, d\tau, \\ Z_{ik+1}(x, y) = \int_{x_0}^{x} dt \int_{y_0}^{y} \frac{(x-t)^{n_i - 1}}{(n_i - 1)!} \frac{(y-\tau)^{n_i - 1}}{(n_i - 1)!} \omega_i(t, \tau)\, d\tau, \end{gathered} \tag{6}$$

где $\varphi_i(x, y)$, $\omega_i(x, y)$ — известные функции.

Справедливость неравенств $V_{ik} \leqslant V_{ik+1}$ $(Z_{ik} \geqslant Z_{ik+1})$ докажем только для $k = 1,\ 2$.

Имеем

$$\frac{\partial^{2n_i} V_{i1}(x, y)}{\partial x^{n_i} \partial y^{n_i}} = f_i [V_{11}, V_{21}, \ldots, V_{m1}] + \gamma_i(x, y), \tag{7}$$

где $\gamma_i(x, y) \leqslant 0$ в $\bar{R}$. Из систем (7) и (5) при $k = 1$ получим

$$\frac{\partial^{2n_i} (V_{i2} - V_{i1})}{\partial x^{n_i} \partial y^{n_i}} = -\gamma_i(x, y) \geqslant 0. \tag{8}$$

Умножая последнее неравенство на $dx > 0$, имеем

$$\frac{\partial^{2n_i} (V_{i2} - V_{i1})}{\partial x^{n_i} \partial y^{n_i}} dx = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^{2n_i - 1} (V_{i2} - V_{i1})}{\partial x^{n_i - 1} \partial y^{n_i}} \right] dx = d_x \left[\frac{\partial^{2n_i - 1} (V_{i2} - V_{i1})}{\partial x^{n_i - 1} \partial y^{n_i}} \right] \geqslant 0.$$

Интегрируя это неравенство в пределах от x_0 до x, получим

$$\frac{\partial^{2n_i - 1} (V_{i2} - V_{i1})}{\partial x^{n_i - 1} \partial y^{n_i}} - \left[\frac{\partial^{2n_i - 1} (V_{i2} - V_{i1})}{\partial x^{n_i - 1} \partial y^{n_i}} \right]_{x = x_0} \geqslant 0.$$

Из начальных условий (2) получаем $\left[\frac{\partial^{2n_i - 2} (V_{i2} - V_{i1})}{\partial x^{n_i - 1} \partial y^{n_i - 1}} \right]_{x = x_0} = 0$, а поэтому

$$\left[\frac{\partial^{2n_i-1}(V_{i2}-V_{i1})}{\partial x^{n_i-1}\partial y^{n_i}}\right]_{x=x_0}=0$$ и, следовательно,

$$\frac{\partial^{2n_i-1}V_{i2}}{\partial x^{n_i-1}\partial y^{n_i}}\geqslant\frac{\partial^{2n_i-1}V_{i1}}{\partial x^{n_i-1}\partial y^{n_i}}\tag{9}$$

при $x\geqslant x_0,\ y\geqslant y_0$.

Аналогично из неравенств (8) получим

$$\frac{\partial^{2n_i-1}V_{i2}}{\partial x^{n_i}\partial y^{n_i-1}}\geqslant\frac{\partial^{2n_i-1}V_{i1}}{\partial x^{n_i}\partial y^{n_i-1}}\tag{10}$$

при $x\geqslant x_0,\ y\geqslant y_0$. Исходя из неравенств (9), (10) и продолжая этот процесс дальше, убеждаемся в справедливости неравенств

$$V_{i2}\geqslant V_{i1},\quad\frac{\partial V_{i2}}{\partial x}\geqslant\frac{\partial V_{i1}}{\partial x},\ldots,\frac{\partial^{r_i}V_{i2}}{\partial x^{s_i}\partial y^{m_i}}\geqslant\frac{\partial^{r_i}V_{i1}}{\partial x^{s_i}\partial y^{m_i}}$$

$$(s_i+m_i=r_i\leqslant 2n_i;\qquad s_i,\ m_i=0,\ 1,\ 2,\ldots,n_i)$$

при $x\geqslant x_0,\ y\geqslant y_0$.

Из системы (5) при $k=1,\ k=2$ получим

$$\frac{\partial^{2n_i}(V_{i3}-V_{i2})}{\partial x^{n_i}\partial y^{n_i}}=f_i[V_{12},V_{22},\ldots,V_{m2}]-f_i[V_{11},V_{21},\ldots,V_{m1}]=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{\partial f_i}{\partial U_j}\bigg|_{M_i}(V_{j2}-V_{j1})+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial p_{is_jm_j}}\bigg|_{M_i}\left(\frac{\partial^{r_j}V_{j1}}{\partial x^{s_j}\partial y^{m_j}}-\frac{\partial^{r_j}V_{j1}}{\partial x^{s_j}\partial y^{m_j}}\right)\right\}\geqslant 0.\tag{11}$$

Проводя аналогичные рассуждения, из (11) получим неравенства

$$V_{i3}\geqslant V_{i2},\quad\frac{\partial V_{i3}}{\partial x}\geqslant\frac{\partial V_{i2}}{\partial x},\quad\frac{\partial V_{i3}}{\partial y}\geqslant\frac{\partial V_{i2}}{\partial y},\ \ldots,\ \frac{\partial^{r_i}V_{i3}}{\partial x^{s_i}\partial y^{m_i}}\geqslant\frac{\partial^{r_i}V_{i2}}{\partial x^{s_i}\partial y^{m_i}}.$$

2. Остается доказать, что упомянутые последовательности функций $\{V_{ik}\}$, $\{V_{ikx}\},\ldots$ с ростом k равномерно стремятся к соответствующим функциям $U_i,\ U_{ix},\ldots,\dfrac{\partial^{r_i}U_i}{\partial x^{s_i}\partial y^{m_i}}$. Для этого сделаем следующие оценки. Из выражения (8) получим

$$\frac{\partial^{2n_i}(V_{i2}-V_{i1})}{\partial x^{n_i}\partial y^{n_i}}=-\gamma_i(x,y)\leqslant P\qquad(P\geqslant 0).\tag{12}$$

Интегрируя неравенство (12) и учитывая начальные данные на характеристиках, получим оценки

$$\frac{\partial^{2n_i-1}(V_{i2}-V_{i1})}{\partial x^{n_i-1}\partial y^{n_i}}\leqslant P(x-x_0+y-y_0),\quad\frac{\partial^{2n_i-1}(V_{i2}-V_{i1})}{\partial x^{n_i}\partial y^{n_i-1}}\leqslant P(x-x_0+y-y_0),$$

$$\ldots,\frac{\partial^{r_i}(V_{i2}-V_{i1})}{\partial x^{s_i}\partial y^{m_i}}\leqslant P\frac{(x-x_0+y-y_0)^{2n_i-s_i-m_i}}{(2n_i-s_i-m_i)!},\ldots,$$

$$\ldots, V_{i2}-V_{i1} \leqslant P\frac{(x-x_0+y-y_0)^{2n_i}}{(2n_i)!},$$

где через (x_0, y_0) обозначены координаты переменной точки, которая находится на характеристиках $x=x_0$, $y=y_0$.

Обозначим $\max[1, \max\limits_{\bar{R}}(x-x_0+y-y_0)^{\tau}] = E$ $(\tau = 1, 2, \ldots, 2n_i-1)$.

Тогда предыдущие неравенства примут вид

$$V_{i2}-V_{i1} \leqslant PE(x-x_0+y-y_0), \qquad \frac{\partial V_{i2}}{\partial x}-\frac{\partial V_{i1}}{\partial x} \leqslant PE(x-x_0+y-y_0), \ldots$$

$$\ldots, \frac{\partial^{r_i}V_{i2}}{\partial x^{s_i}\partial y^{m_i}}-\frac{\partial^{r_i}V_{i1}}{\partial x^{s_i}\partial y^{m_i}} \leqslant PE(x-x_0+y-y_0)$$

$$(s_i+m_i=r_i\leqslant 2n_i; \qquad s_i,\ m_i=0,\ 1,\ 2,\ldots,n_i).$$

Рассмотрим неравенство (11). Обозначим

$$T=\max\left\{\sup_{\bar{D}}\frac{\partial f_i}{\partial U_j}, \sup_{\bar{D}}\frac{\partial f_i}{\partial p_j}, \sup_{\bar{D}}\frac{\partial f_i}{\partial q_j}, \ldots\right\} \qquad (T>0).$$

Тогда из неравенства (11) получим неравенства

$$\frac{\partial^{2n_i}(V_{i3}-V_{i2})}{\partial x^{n_i}\partial y^{n_i}} \leqslant CPET(x-x_0+y-y_0), \tag{13}$$

где C — число аргументов $U_1, U_2, \ldots, U_m, p_1, p_2, \ldots, p_m, \ldots$ в функции f_i.

Аналогично из (13) получаем:

$$V_{i3}-V_{i2} \leqslant CPE^2T\frac{(x-x_0+y-y_0)^2}{2!}, \ldots, \frac{\partial^{r_i}V_{i3}}{\partial x^{s_i}\partial y^{m_i}}-\frac{\partial^{r_i}V_{i2}}{\partial x^{s_i}\partial y^{m_i}} \leqslant$$

$$\leqslant CPE^2T\frac{(x-x_0+y-y_0)^2}{2!}.$$

Из системы (5) при $k=2$, $k=3$ получим

$$\frac{\partial^{2n_i}(V_{i4}-V_{i3})}{\partial x^{n_i}\partial y^{n_i}} \leqslant PC^2T^2E^2\frac{(x-x_0+y-y_0)^2}{2!} =$$

$$= PN^2\frac{(x-x_0+y-y_0)^2}{2!}, \qquad N=CTE. \tag{14}$$

Методом математической индукции убеждаемся в справедливости неравенств

$$V_{ik+1}-V_{ik} \leqslant \frac{A^k}{k!}, \qquad \frac{\partial V_{ik+1}}{\partial x}-\frac{\partial V_{ik}}{\partial x} \leqslant \frac{A^k}{k!}, \ldots$$

$$, \frac{\partial^{r_i}V_{ik+1}}{\partial x^{s_i}\partial y^{m_i}}-\frac{\partial^{r_i}V_{ik}}{\partial x^{s_i}\partial y^{m_i}} \leqslant \frac{A^k}{k!}, \tag{15}$$

где A — некоторая положительная постоянная.

Рассмотрим следующие ряды:

$$\widetilde{U}_i = V_{i1} + (V_{i2} - V_{i1}) + \ldots + (V_{ik} - V_{ik-1}) + \ldots, \tag{16_1}$$

$$\widetilde{U}_{ix} = V_{i1x} + (V_{i2x} - V_{i1x}) + \ldots + (V_{ikx} - V_{ik-1x}) + \ldots, \tag{16_2}$$

. . . .

Обозначим суммы рядов (16_r) соответственно $\widetilde{U}_i$, $\widetilde{U}_{ix}$, $\widetilde{U}_{iy}$, $\widetilde{U}_{ixx}, \ldots$ и рассмотрим ряд (16_r) $(r \leqslant c+1)$. Члены ряда (16_r) в $\overline{R}$ — непрерывные функции. Из неравенств (15) следует, что ряд (16_r) в области $(x, y) \in \overline{R}$ сходится абсолютно и равномерно. Отсюда следует существование и непрерывность суммы ряда (16_r), а также то, что эта сумма удовлетворяет начальным условиям (2). Остается доказать, что полученные таким образом функции $\widetilde{U}_i$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (1). Из системы (5) при начальных условиях (2) получим:

$$V_{ik+1}(x, y) = \int_{x_0}^{x} dt \int_{y_0}^{y} K_{n_i}(x, y, t, \tau)\, f_i\left(t, \tau, V_{ik}, \frac{\partial V_{ik}}{\partial t}, \ldots\right) d\tau, \tag{17}$$

где

$$K_{n_i}(x, y, t, \tau) = \frac{(x-t)^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \frac{(y-\tau)^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \leqslant \frac{(\alpha\beta)^{n_i-1}}{[(n_i-1)!]^2}.$$

Разложив $f_i[\widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2, \ldots, \widetilde{U}_m] - f_i[V_{1k}, V_{2k}, \ldots, V_{mk}]$ в ряд Тейлора, используя неравенства вида (15), перейдем в предыдущей формуле к пределу при $k \to \infty$.

Левая часть в формуле (17) равномерно стремится к $\widetilde{U}_i$, а

$$\iint_R K_{n_i}(x, y, t, \tau)\, f_i[V_{1k}, V_{2k}, \ldots, V_{mk}]\, dt d\tau$$

равномерно стремится к

$$\iint_R K_{n_i}(x, y, t, \tau)\, f_i[\widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2, \ldots, \widetilde{U}_m] dt d\tau.$$

Таким образом, переходя в (17) к пределу, получим

$$\widetilde{U}_i(x, y) = \int_{x_0}^{x} dt \int_{y_0}^{y} K_{n_i}(x, y, t, \tau)\, f_i[\widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2, \ldots, \widetilde{U}_m]\, d\tau. \tag{18}$$

Продифференцировав правую и левую части формулы (18), получим:

$$\frac{\partial^{2n_i} \widetilde{U}_i}{\partial x^{n_i} \partial y^{n_i}} = f_i[\widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2, \ldots, \widetilde{U}_m],$$

следовательно, $\widetilde{U}_i = U_i$.

3. Докажем, что $V_{ik} \to U_i$, оставаясь всегда не больше U_i, т. е. всюду при $(x, y) \in \overline{R}$ $U_i - V_{ik} \geqslant 0$.

Предположим противное. Пусть для некоторого номера k $V_{ik} > U_i$. Тогда при $p \to \infty$ для последовательности V_{ik+p} будет $V_{ik+p} > U_i$.

В пункте 1 доказано, что $V_{ik+1} \geqslant V_{ik}$, и поэтому, из неравенств $V_{ik+p} > U_i$ следует, что ряд (16_r) в любой точке $\overline{R}$ не сходится к U_i, а это противоречит доказанному в пункте 2.

Аналогично, если предположить, что V_{ik} пересекаются с U_i, т. е. в одних точках области R имеем $V_{ik} \leqslant U_i$, а в других $V_{ik} > U_i$, тогда в тех точках $(x, y) \in R$, в которых $V_{ik} > U_i$, в силу неравенств $V_{ik+1} \geqslant V_{ik}$ получим, что в них V_{ik} не будет сходиться к решению система дифференциальных уравнений (1). Следовательно, если выполнены условия теоремы, то везде в $\overline{R}$ $V_{i1} \leqslant U_i$ для невязки $\gamma_i(x, y) \leqslant 0$.

Сформулированная теорема имеет место для системы дифференциальных уравнений вида (1), когда число независимых переменных в функциях $U_i(x, y)$ более двух.

В ходе доказательства теоремы 1 доказано утверждение, которое можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Если функции $Z_i = Z_{i1}$, $V_i = V_{i1}$ удовлетворяют условиям теоремы* 1, *то последовательности функций* $\{Z_{ik}\}$, $\{V_{ik}\}$, *которые определены из системы* (5) *при начальных условиях* (2), *удовлетворяют при* $(x, y) \in \overline{R}$ *неравенствам*

$$V_{i1} \leqslant V_{i2} \leqslant V_{i3} \leqslant \ldots \leqslant U_i \leqslant \ldots \leqslant Z_{i3} \leqslant Z_{i2} \leqslant Z_{i1},$$

$$\frac{\partial V_{i1}}{\partial x} \leqslant \frac{\partial V_{i2}}{\partial x} \leqslant \frac{\partial V_{i3}}{\partial x} \leqslant \ldots \leqslant \frac{\partial U_i}{\partial x} \leqslant \ldots \leqslant \frac{\partial Z_{i3}}{\partial x} \leqslant \frac{\partial Z_{i2}}{\partial x} \leqslant \frac{\partial Z_{i1}}{\partial x},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial^{r_i} V_{i1}}{\partial x^{s_i} \partial y^{m_i}} \leqslant \frac{\partial^{r_i} V_{i2}}{\partial x^{s_i} \partial y^{m_i}} \leqslant \ldots \leqslant \frac{\partial^{r_i} U_i}{\partial x^{s_i} \partial y^{m_i}} \leqslant \ldots \leqslant \frac{\partial^{r_i} Z_{i2}}{\partial x^{s_i} \partial y^{m_i}} \leqslant \frac{\partial^{r_i} Z_{i1}}{\partial x^{s_i} \partial y^{m_i}}$$

$$(s_i + m_i = r_i \leqslant 2n_i; \quad s_i,\ m_i = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n_i),$$

причем соответствующие последовательности функций $\{V_{ik}\}$, $\{Z_{ik}\}$ *вместе со своими производными до* r_i *порядка включительно*

$$\{V_{ikx}\}, \ldots, \left\{\frac{\partial^{r_i} V_{ik}}{\partial x^{s_i} \partial y^{m_i}}\right\}, \qquad \{Z_{ikx}\}, \ldots, \left\{\frac{\partial^{r_i} Z_{ik}}{\partial x^{s_i} \partial y^{m_i}}\right\}$$

с возрастанием k *равномерно и монотонно с двух сторон соответственно сходятся к* U_i, $U_{ix}, \ldots, \dfrac{\partial^{r_i} U_i}{\partial x^{s_i} \partial y^{m_i}}$ *решения задачи Гурса* (1), (2).

Примечание 1. Пусть начальные условия (2) не нулевые, т. е.

$$\frac{\partial^{2k-2} U_i(x_0, y)}{\partial x^{k-1} \partial y^{k-1}} = \sigma_{ik}(y), \qquad \frac{\partial^{2k-2} U_i(x, y_0)}{\partial x^{k-1} \partial y^{k-1}} = \sigma^*_{ik}(x),$$
$$\sigma_{ik}(y_0) = \sigma^*_{ik}(x_0) \qquad (k = 1,\ 2, \ldots, n_i). \tag{2_1}$$

Считаем, что функции $\sigma_{ik}(y)$ $n_i + 1 - k$ раз непрерывно дифференцируемы по y, а $\sigma^*_{ik}(x)$ $n_i + 1 - k$ раз непрерывно дифференцируемы по x. В этом случае все изложенное остается справедливо, только в правых частях формул (6), (17), (18) нужно прибавить слагаемое $F_i(x, y)$, где [1]

$$F_i(x, y) = \sigma^*_{i1}(x) + \sigma_{i1}(y) - \sigma_{i1}(y_0) - \sum_{k=2}^{n_i} \frac{(x - x_0)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{(y - y_0)^{k-1}}{(k-1)!} \sigma_{ik}(y_0) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n_i} \left[\frac{(y - y_0)^{k-1}}{(k-1)!} \int_{x_0}^{x} \frac{(x - t)^{k-2}}{(k-2)!} \sigma^*_{ik}(t)\, dt + \right.$$

$$+\frac{(x-x_0)^{k-1}}{(k-1)!}\int_{y_0}^{y}\frac{(y-\tau)^{k-2}}{(k-2)!}\sigma_{ik}(\tau)\,d\tau\Bigg].$$

Примечание 2. Существование функций $V_i=V_{i1}(x, y)$ $(Z_i=Z_{i1}(x, y))$ при $(x, y)\in R_1$, $R_1\in R$ следует из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^{2n_i}V_i(x, y)}{\partial x^{n_i}\partial y^{n_i}}=M_i\left(\frac{\partial^{2n_i}Z_i(x, y)}{\partial x^{n_i}\partial y^{n_i}}=\widetilde{M}_i\right) \tag{19}$$

при начальных условиях (2), (2_1) при соответственном подборе чисел $M_i(\widetilde{M}_i)$. Действительно, существование чисел M_i, $\widetilde{M}_i$ следует из таких рассуждений. Обозначим через $\overline{D}$ некоторую замкнутую область переменных $x, y, U_j, \ldots, \frac{\partial^{2n_j-1}U_j}{\partial x^{k_j}\partial y^{\tau_j}}$, проекция которой на плоскость xoy дает область $\overline{R}$. Правые части $f_i[U_1, \ldots, U_m]$ системы дифференциальных уравнений (1) при данных предположениях в заданной замкнутой области $\overline{D}$ — известные непрерывные функции своих аргументов. Обозначим

$$M_i=\inf_{\overline{D}}\{f_i[U_1, U_2, \ldots, U_m]\}-1,$$

$$\widetilde{M}_i=\sup_{\overline{D}}\{f_i[U_1, U_2, \ldots, U_m]\}+1.$$

Тогда

$$\frac{\partial^{2n_i}V_i(x, y)}{\partial x^{n_i}\partial y^{n_i}}=f_i[V_1, V_2, \ldots, V_m]+\gamma_i(x, y)=M_i,$$

$$\gamma_i(x, y)=M_i-f_i[V_1, V_2, \ldots, V_m]<0.$$

Решения системы (19) при начальных условиях (2_1) даются [1] формулой

$$V_i(x, y)=F_i(x, y)+\int_{x_0}^{x}dt\int_{y_0}^{y}K_{n_i}(x, y, t, \tau)\,M_i d\tau.$$

Если начальные условия (2_1) нулевые, то в $\overline{R}$ $F_i(x, y)\equiv 0$.

В заключение докажем, что при условиях (3) для задачи Гурса (1), (2) или (2_1) справедлива

Теорема 3. *Для задачи Гурса* (1), (2) *при* $(x, y)\in R_1$ *существует единственная система непрерывных решений* $U_i(x, y)$.

Доказательство. Существование системы функций $U_i(x, y)$ доказано в процессе доказательства теоремы 1. Это следует из доказательства существования сумм рядов (16_r). Остается доказать единственность решения задачи Гурса (1), (2). Допустим, что существуют две системы решений задачи Гурса (1), (2), которые обозначим $U_i(x, y)$, $\widetilde{U}_i(x, y)$, и рассмотрим их разности $W_i(x, y)=U_i-\widetilde{U}_i$. Из (18) получим

$$W_i(x, y)=\int_{x_0}^{x}dt\int_{y_0}^{y}K_{n_i}(x, y, t, \tau)\{f_i[U_1, \ldots, U_m]-f_i[\widetilde{U}_1, \ldots, \widetilde{U}_m]\}\,d\tau. \tag{20}$$

Не нарушая общности рассуждений, допустим, что системы решений U_i, $\widetilde{U}_i$ не совпадают в одной точке (ξ_i, η_i), которая может находиться и как угодно близко к одной из характеристик $x=x_0$, $y=y_0$. Пусть $x_0<$

$< \xi_i < x_0 + \alpha$; $y_0 < \eta_i < y_0 + \varepsilon_i$. Разложив в ряд Тейлора $f_i[U_1, \ldots, U_m] - f_i[\widetilde{U}_1, \ldots, \widetilde{U}_m]$, будем иметь

$$f_i[U_1, U_2, \ldots, U_m] - f_i[\widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2, \ldots, \widetilde{U}_m] =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial U_j}\bigg|_{M_i} (U_j - \widetilde{U}_j) + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial p_{j s_j m_j}}\bigg|_{M_i} \left(\frac{\partial^{r_j} U_j}{\partial x^{s_j} \partial y^{m_j}} - \frac{\partial^{r_j} \widetilde{U}_j}{\partial x^{s_j} \partial y^{m_j}} \right) \right\}.$$

Обозначая

$$T = \max \left\{ \sup_{\overline{D}} \frac{\partial f_i}{\partial U_j}, \quad \sup_{\overline{D}} \frac{\partial f_i}{\partial p_j}, \ldots \right\} \qquad (T > 0),$$

$$K = \max \left\{ \sup_{\overline{R}} |U_i - \widetilde{U}_i|, \quad \sup_{\overline{R}} \left| \frac{\partial U_i}{\partial x} - \frac{\partial \widetilde{U}_i}{\partial x} \right|, \ldots \right\},$$

$$|W_i(\xi_i, \eta_i)| = \theta_i$$

и учитывая, что

$$K_{n_i}(x, y, t, \tau) \leqslant \frac{(\alpha\beta)^{n_i - 1}}{[(n_i - 1)!]^2},$$

из (20) получим:

$$\theta_i < \frac{(\alpha\beta)^{n_i - 1} CTK}{[(n_i - 1)!]^2} \int_{x_0}^{x_0 + \alpha} dt \int_{y_0}^{y_0 + \varepsilon_i} d\tau = \frac{TCK (\alpha\beta)^{n_i - 1} \alpha \varepsilon_i}{[(n_i - 1)!]^2}.$$

Имеем $1 < \dfrac{TCK \alpha^{n_i} \beta^{n_i - 1}}{\theta_i [(n_i - 1)!]^2}$, где ε_i может быть и сколь-угодно малое. Однако последнее невозможно, так как при

$$\varepsilon_i = \frac{\theta_i [(n_i - 1)!]^2}{TCK \alpha^{n_i} \beta^{n_i - 1}}$$

получим $1 < 1$.

Примечание 3. В работах [2, 3] аппроксимирующие последовательности функций для задачи Гурса (1), (2) в случае системы дифференцируемых уравнений второго порядка строятся по формулам

$$Z_{in+1}(x, y) = Z_{in}(x, y) - \sigma_{in}(x, y),$$

где σ_{in} — решение уравнения

$$\sigma_{inxy} - m_i \sigma_{inx} - k_i \sigma_{iny} - r_i \sigma_{in} = \alpha_{in}$$

с нулевыми начальными условиями на характеристиках $x = x_0$, $y = y_0$, причем $\alpha_{in} = \min \{ Z_{inxy} - f_i [U_1, \ldots, Z_{in}, \ldots, U_n] \}$. Условия (3) заменены условиями

$$f_{ip_i} - m_i > 0, \qquad f_{iq_i} - k_i > 0 \qquad f_{iU_j} - r_i > 0,$$

где m_i, k_i, r_i — неотрицательные числа.

Однако практическое применение метода Ким Меннама связано с большими трудностями, особенно при $2n > 2$. В этом смысле предлагаемый метод решения задачи Гурса при $2n > 2$ с помощью аппроксимирующих функций по формуле (6) гораздо проще и удобнее.

Далее, в работах Г. А. Артемова [4, 5] в случае уравнения второго п рядка

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = f(x, y, U, p, q) = f[U]$$

для задачи Коши аппроксимирующие функции строятся при условии, что некоторой области функция f удовлетворяет условиям:

а) $f_U > 0,\ f_p > 0,\ f_q > 0;$

б) квадратическая форма $f_{U^2}\xi^2 + f_{p^2}\eta^2 + f_{q^2}\gamma^2 + f_{Up}\xi\eta + f_{Uq}\xi\gamma + f_{pq}\eta\gamma \leqslant$

в) смешанные производные $f_{Up} \geqslant 0,\ f_{Uq} \geqslant 0,\ f_{pq} \geqslant 0;$

г) $f_{xp} \leqslant 0,\ f_{yq} \leqslant 0.$

Рассмотренный нами метод с помощью формулы (6) устраняет огран чения б), в), г). Условия а) для системы дифференциальных уравнений п рядка $2n > 2$ заменено более общими условиями (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. И. Ковач, Докл. и сообщ. Ужгородск. гос. ун-та, сер. физ-матем., истс наук, т. 5, 1962, 98—101.
2. Ким Меннам, Уч. зап. Кабардино-Балкарского гос. ун-та, т. 16, 1962, 3(
3. Ким Меннам, УМН. т. 15, вып. 1, 1960, 239.
4. Г. А. Артемов, ДАН СССР, т. 102, 1955, 197.
5. Г. А. Артемов, УМЖ, т. IX, 1957.

Поступила 20.III 1964 г.
Ужгород