1965 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 17, №
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Характеризация римановых многообразий

П. И. Петров

1. Риманово пространство V_n — дифференцируемое многообразие, котором задана невырожденная квадратичная дифференциальная фо

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j, \qquad g \neq 0.$$

Две формы ds^2, $d\bar{s}^2$ в одной и той же координатной системе называю эквивалентными, если существует точечное преобразование $x \to \bar{x}$ с не ным нулю якобианом, переводящее одну из них в другую.

Собрание фактов, общих эквивалентным классам форм вида (1), ставляет содержание римановой геометрии. На этом основании пробл классификации римановых многообразий V_n можно рассматривать как дачу разбиения дифференциальных квадратичных форм от n перемен на неэквивалентные классы. Уже Гаусс [1], Риман [2] использовали стр туру тензора кривизны, чтобы выделить специальные типы геомет основанных на задании их метрики при помощи ds^2.

На примерах исследований [3, 4, 5] эта идея основоположников ри новой геометрии в несколько модернизированном виде нашла приложе и конкретизацию. В упомянутых здесь работах даны классификации мн образий V_3, V_4 с помощью арифметических инвариантов фундаменталь форм этих пространств.

Цель настоящей статьи — аналитическая характеризация метр ских тензоров $g_{ij}(u)$ различных классов римановых многообразий V_3, и пространств Эйнштейна четырех измерений.

2. В теории инвариантов аффинных преобразований рассматрив контравариантные и ковариантные векторы.

Линейная вектор-функция A, когда аргумент и сама функция являю векторами одного и того же вида, называется вектор-функцией пер рода.

Каждый такой вектор-функции

$$\bar{y} = A(\bar{x})$$

соответствует матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \dots a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \dots a_n^2 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_1^n & a_2^n \dots a_n^n \end{pmatrix},$$

которая устанавливает линейное преобразование

$$y^i = a_\alpha^i x^\alpha.$$

Алгебра вектор-функций является алгеброй тех матриц, которые этим вектор-функциям соответствуют. В трехмерном пространстве существуют шесть типов линейных вектор-функций с вейерштрассовыми характеристиками [6]:

$$[111],\ [21],\ [(11)1],\ [3],\ [(21)],\ [(111)]. \tag{4}$$

3. Характеристическим полиномом вектор-функции A (или матрицы A), как известно, называется определитель $|\lambda E - A|$:

$$\varphi(\lambda) = \lambda^3 - \sigma_1\lambda^2 + \sigma_2\lambda - \sigma_3. \tag{5}$$

Дискриминант кубического уравнения (5)

$$D = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_1^3\sigma_3 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 4\sigma_2^3 - 27\sigma_3^2, \tag{6}$$

воспользовавшись формулами

$$\begin{cases} \sigma_1 E = 3A - \dfrac{1}{2}\varphi''(A), \\ \sigma_2 E = 3A^2 + \varphi'(A) - A\varphi''(A), \\ \sigma_3 E = A^3 + A\varphi'(A) - \dfrac{A^2}{2}\varphi''(A), \end{cases} \tag{7}$$

можно написать в виде

$$H\varphi'(A) = -\frac{D}{4}E, \tag{8}$$

где положено

$$H = [\varphi'(A)]^2 - \frac{1}{16}[\varphi''(A)]^2\varphi'(A). \tag{9}$$

Обозначим через ϱ_2 значение ранга матрицы $\varphi'(A)$, а через ϱ_1 — наибольшее число среди значений рангов матриц $\varphi'(A)$ и $\varphi''(A)$. Г. Б. Гуревич предложил [7] как задачу доказать следующее предложение.

Лемма. *Линейные вектор-функции первого рода трехмерного пространства имеют следующие ниже арифметические* ($\varrho_1\varrho_2$) *и алгебраические характеристики*:

$$\begin{array}{ll} (33) & H\varphi'(A) \neq 0, \\ (32) & H\varphi'(A) = 0, \quad H \neq 0. \\ (31) & H = 0, \quad \varphi'^2(A) \neq 0. \\ (21) & \varphi'^2(A) = 0, \quad \varphi'(A) \neq 0. \\ (10) & \varphi''^2(A) = 0, \quad \varphi''(A) \neq 0. \\ (00) & \varphi''(A) = 0. \end{array} \tag{10}$$

Доказательство 1°. Пусть линейная вектор-функция первого рода имеет вейерштрассову характеристику [111]. Это значит, что ее матрица путем выбора контравариантных координатных векторов по главным направлениям вектор-функции может быть приведена к диагональному виду

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ не равны.} \tag{11}$$

Следовательно,
$$\varphi'(A)=\begin{pmatrix}\varphi'(\lambda_1) & 0 & 0\\ 0 & \varphi'(\lambda_2) & 0\\ 0 & 0 & \varphi'(\lambda_3)\end{pmatrix}. \tag{12}$$

Так как λ_i—простые корни полинома $\varphi(\lambda)$, т. е. $\varphi(\lambda_i)=0$, $\varphi'(\lambda_i)\neq 0$, то $\varrho_2=3$. Отсюда заключаем, что $\varrho_1=3$. Выражение $D=\prod\limits_{\alpha>\beta}(\lambda_\alpha-\lambda_\beta)^2$, ввиду того, что λ_1, λ_2, λ_3 различны, отлично от нуля.

Итак, если A имеет вейерштрассову характеристику [111], то
$$(\varrho_1\varrho_2)=(33),\qquad H\varphi'(A)\neq 0. \tag{13}$$
Обратно, из (13), в силу (8), следует $D\neq 0$; значит, характеристические числа λ_1, λ_2, λ_3 матрицы A различны, и поэтому ее жорданов вид совпадает с матрицей (11), имеющей характеристику [111].

2°. Матрица, имеющая вейерштрассову характеристику [21], всегда приводится к нормальному виду
$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix},\ \lambda_1,\lambda_2 \text{ не равны}. \tag{14}$$

Для матрицы (14) имеем:
$$\varphi'(A)=\begin{pmatrix}0 & \varphi''(\lambda_1) & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \varphi'(\lambda_2)\end{pmatrix}, \tag{15}$$
$$\varphi''(A)=\begin{pmatrix}\varphi''(\lambda_1) & 0 & 0\\ 0 & \varphi''(\lambda_1) & 0\\ 0 & 0 & \varphi''(\lambda_2)\end{pmatrix}. \tag{16}$$

Так как $\varphi(\lambda_1)=0$, $\varphi'(\lambda_1)=0$, $\varphi''(\lambda_1)\neq 0$, $\varphi'(\lambda_2)\neq 0$, $\varphi''(\lambda_2)\neq 0$, то $\varrho_2=2$, $\varrho_1=3$. Подставляя (15), (16) в формулу (9), находим:
$$H=-\frac{1}{16}\begin{pmatrix}0 & \varphi''^3(\lambda_1) & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{17}$$

Следовательно, если линейная вектор-функция первого рода A имеет вейерштрассову характеристику [21], то
$$(\varrho_1\varrho_2)=(32),\quad H\varphi'(A)=0,\ H\neq 0. \tag{18}$$
Если, наоборот, дана матрица A, удовлетворяющая требованиям (18), то дискриминант ее характеристического полинома равен нулю; стало быть, $\varphi(\lambda)$ имеет кратный корень λ_1. Порядок кратности корня равен двум, ибо в противном случае из условий тройного корня полинома (5)
$$\begin{cases}\varphi'(A)-\dfrac{1}{12}\varphi''^2(A)=0,\\ \varphi'(A)\,\varphi''(A)=0\end{cases} \tag{19}$$
следовало бы $H=0$, что противоречит предположению $H\neq 0$. В силу $\varrho_2=2$, этому двойному корню соответствует только одно главное направление. Поэтому A имеет канонический вид (14), а ее вейерштрассова характеристика выражается символом [21].

3°. Возьмем матрицу A с характеристикой [(11) 1]. Ее всегда можно рассматривать как

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_1 \neq \lambda_2. \tag{20}$$

Нетрудно видеть, что для матрицы (20)

$$(\varrho_1 \varrho_2) = (31), \ H = 0, \ \varphi'^2(A) \neq 0. \tag{21}$$

Справедливо и обратное, так как требования (21) выражают прежде всего тот факт, что $|\lambda E - A| = 0$ имеет кратный корень λ_1. Если бы λ_1 был трехкратным корнем, то на основании соотношения

$$\varphi'^2(A) = (\sigma_1^2 - 3\sigma_2) A^2 + (9\sigma_3 - \sigma_1\sigma_2) A + (\sigma_2^2 - 3\sigma_1\sigma_3) E \tag{22}$$

следовало бы $\varphi'^2(A) = 0$, вопреки одному из условий (21). Корню λ_1 отвечают, в силу $\varrho_2 = 1$, два главных направления. Следовательно, матрица A простого типа, а ее характеристика изображается символом [(11) 1].

4°. Предположим теперь, что A имеет характеристику [3]. Трансформируем ее к виду Жордана

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Для матрицы (23) нетрудно установить, что

$$(\varrho_1 \varrho_2) = (21), \ \varphi'^2(A) = 0, \ \varphi'(A) \neq 0. \tag{24}$$

Характеристический полином $\varphi(\lambda)$ матрицы A, удовлетворяющей условиям, (24), имеет кратный корень λ_1, ибо уравнение $\varphi'^2(A) = 0$ вместе с формулой

$$\frac{D}{4} E = \left(\frac{\varphi''^2(A)}{16} - \varphi'(A) \right) \varphi'^2(A)$$

обнаруживает, что $D = 0$. Если $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2$—корни полинома $\varphi(\lambda)$, где $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то имели бы $\varphi'(\lambda_1) = 0$, $\varphi'(\lambda_2) = 0$, как характеристические числа нильпотентной вектор-функции $\varphi'(A)$. Но это противоречит гипотезе $\varphi(\lambda_2) = 0$, $\varphi'(\lambda_2) \neq 0$. Отсюда заключаем, что $\lambda_1 = \lambda_2$. Трехкратному корню λ_1, ввиду условий $\varrho_1 = 2$, $\varrho_2 = 1$, соответствует лишь одно главное направление матрицы A. Значит, она имеет нормальный вид (23) и характеристику [3].

5°. Если A имеет характеристику [(21)], т.е. представима матрицей

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

то условия

$$(\varrho_1 \varrho_2) = (10), \ \varphi''^2(A) = 0, \ \varphi''(A) \neq 0 \tag{26}$$

выполняются. Обратное утверждение также справедливо: наряду с равенством $\varphi'(A) = 0$ имеет место и $[\varphi''(A)]^2 = 0$; значит, $|\lambda E - A| = (\lambda - \lambda_1)^3$; из трех возможных гипотез относительно структуры A только (25) отвечает значениям арифметических инвариантов $\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = 0$.

6°. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \tag{27}$$

имеет характеристику [(111)] и обладает свойствами

$$(\varrho_1 \varrho_2) = (00), \ \varphi''(A) = 0. \tag{28}$$

Равенства (28) вполне характеризуют матрицу (27): $\varphi'(A) = 0$, $\varphi''(A) = 0$, стало быть, одновременно с уравнением $\varphi(\lambda_1) = 0$ удовлетворяются и два других $\varphi'(\lambda_1) = 0$, $\varphi''(\lambda_1) = 0$. Среди матриц, имеющих трехкратные характеристические числа с каноническими видами (23), (25), (27), только последняя отвечает условиям $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$.

4. Тензорно-дифференциальный инвариант второго порядка формы (1), известный чаще под названием тензора кривизны ее,

$$R_{hijk} = \frac{\partial \Gamma_{ik,h}}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij,h}}{\partial u^k} + g^{lm}\left(\Gamma_{ij,l} \, \Gamma_{hk,m} - \Gamma_{ik,l} \Gamma_{jh,m} \right), \tag{29}$$

где $\Gamma_{ij,k}$ — символы Кристоффеля первого рода,

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right),$$

выражается через $g_{ij}(u)$, $\quad \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}, \quad \dfrac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^k \partial u^l}$.

Формула (29) показывает, как вычислить компоненты R_{hijk} по данным $g_{ij}(u)$. Она же позволяет при $n = 3$ определить, путем интегрирования системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, шесть искомых функций $g_{ij}(u^1 u^2 u^3)$ по данным $R_{hijk}(u)$ (см. [3], стр. 119—120). Теорема, на которую мы только что ссылались, сводит проблему классификации трехмерных многообразий Римана V_3 к алгебраической задаче разыскания неэквивалентных типов тензора кривизны R_{hijk} в пространстве трех измерений. Последняя задача в случае $n = 3$ упрощается, так как в этом специальном случае тензор R_{hijk} всегда можно представить линейно через g_{ij} и L_{ij}:

$$R_{hijk} = 4 g_{[h[j} L_{i]k]}. \tag{30}$$

Тензор второй валентности L_{ij} определяется уравнением

$$L_{ij} = - R_{ij} + \frac{R}{4} g_{ij}, \tag{31}$$

где R_{ij} — тензор Риччи, R — скалярная кривизна.

Полагая

$$L^i_j = g^{i\alpha} L_{\alpha j}, \tag{32}$$

вопрос классификации V_3 можно привести к нахождению типов линейных вектор-функций

$$\mathfrak{L} = (L^i_j) \qquad (i, j = 1,2,3). \tag{33}$$

Как известно, их существует шесть, вейерштрассовы характеристики которых: [111], [21], [(11)1], [3], [(21)], [(111)]. Следуя по описанному выше пути, видим, что с каждой неособенной формой ds^2 от трех переменных ассоциируется однозначно арифметический инвариант $[e_1 e_2 e_3]$ — характеристика соответствующей ей вектор-функции $\mathfrak{L}$. Назовем ее коротко **характе-**

ристикой самой **формы**. Две эквивалентные формы имеют одинаковые характеристики. Условимся включить в один класс не только эквивалентные друг другу формы, но и такие, у которых матрицы (33) приводятся к сходным по строению каноническим видам Жордана. В итоге имеем классификацию V_3 по их дифференциальным инвариантам.

Пусть $\varphi(\lambda) = |\lambda E - \mathfrak{L}|$, ϱ_2 — ранг матрицы $\varphi'(\mathfrak{L})$, а ϱ_1 — наибольшее значение рангов матриц $\varphi'(\mathfrak{L})$, $\varphi''(\mathfrak{L})$. Если принять во внимание лемму п. 3 о новой характеризации вектор-функций, то получим следующую теорему.

Т е о р е м а I. *Совокупность неособенных тернарных дифференциальных квадратичных форм*

$$ds^2 = g_{ij}(u)\, du^i du^j \qquad (ij = 1,2,3) \tag{34}$$

разбивается на шесть не пустых и не содержащих общие элементы классов, характеризующихся, соответственно, условиями:

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{I}.\ (\varrho_1\varrho_2) = (33) & H\varphi'(\mathfrak{L}) \neq 0, & \\
\mathrm{II}.\ (\varrho_1\varrho_2) = (32) & H\varphi'(\mathfrak{L}) = 0, & H \neq 0\cdot \\
\mathrm{III}.\ (\varrho_1\varrho_2) = (31) & H = 0, & \varphi'^2(\mathfrak{L}) \neq 0. \\
\mathrm{IV}.\ (\varrho_1\varrho_2) = (21) & \varphi'^2(\mathfrak{L}) = 0, & \varphi'(\mathfrak{L}) \neq 0. \\
\mathrm{V}.\ (\varrho_1\varrho_2) = (10) & \varphi''^2(\mathfrak{L}) = 0, & \varphi''(\mathfrak{L}) \neq 0. \\
\mathrm{VI}.\ (\varrho_1\varrho_2) = (00) & \varphi''(\mathfrak{L}) = 0. &
\end{array} \tag{35}$$

Эта теорема дает необходимые и достаточные признаки, позволяющие судить, когда форма вида (34) относится к тому или другому из классов I—VI. Любой критерий из (35) представляет собою явно выписанную совместную дифференциальную систему для разыскания фундаментального тензора $g_{ij}(u)$ определенного класса пространства. По этой причине теорема I открывает новые пути исследования дифференциальных свойств метризованных по Риману многообразий трех измерений V_3.

5. Конформно-плоские римановы пространства C_3, как известно, получаются из множества всех V_3 путем дополнительного требования

$$L_{i[j,k]} = 0. \tag{36}$$

Вследствие этого, метод классификации многообразий V_3 по характеристикам их метрических форм ds^2 в случае пространств C_3 применяется к элементам матрицы $\mathfrak{L}$ с учетом условий (36) и приводит к следующему выводу.

Т е о р е м а II. *Существуют шесть типов* C_3, *характеризующихся, соответственно, условиями*:

$$\boxed{L_{i[j,k]} = 0} \tag{37}$$

I II III IV V VI

Согласно утверждению теоремы II, каждый из классов C_3 аналитически определяется соотношением (36) и одним из условий I— VI из ряда (35). По своей форме этот вывод аналогичен предыдущему, хотя мы не имеем права в данном случае применять теорему о взаимно определяемости при $n = 3$ двух величин g_{ij}, R_{hijk}, на которую опирались существенным образом в рассуждениях п. 4. Но откуда же следует, что любая из шести дифференциальных систем серии (37) имеет решение? Иными словами, откуда известно, что каждая из шести серий требований (37) не только необходима, но и достаточна, чтобы построить тензор g_{ij} соответствующего типа конформно-плоского трехмерного пространства Римана? Этот вопрос решается утвердительно в силу построенных в [4] примеров, иллюстрирующих существование всех перечисленных в теореме II шести типов пространств C_3. Конечно, отсюда вновь вытекает существование упомянутых в теореме I классов пространств V_3.

6. Риманово пространство V_n, для которого

$$R_{ij} - \frac{R}{n} g_{ij} = 0\,, \tag{38}$$

называется эйнштейновским [8]. Задача классификации эйнштейновских пространств при $n = 4$ мною приведена [5] к нахождению в пространстве Эвклида неэквивалентных типов двух симметрических матриц с равными нулю следами $T = (T_{ij})$, $\overline{T} = (\overline{T}_{\overline{ij}})$ $(i, j = 1, 2, 3)$. Когда сигнатура основной формы ds^2 пространства Эйнштейна $s = -2$, элементы T_{ij}, $\overline{T}_{\overline{ij}}$ оказываются комплексно-сопряженными линейными однородными функциями составляющих тензора кривизны относительно местной ортонормальной системы координат. На этом основании в теореме 28 статьи [5] констатируется существование трех типов четырехмерных пространств Эйнштейна сигнатуры $s = -2$, отвечающих, соответственно, характеристикам λ-матриц $\lambda E - T$, $\lambda \overline{E} - \overline{T}$:

$$\mathrm{I}.\ [111],\ [\overline{111}].\quad \mathrm{II}.\ [12],\ [\overline{12}].\quad \mathrm{III}.\ [3],\ [\overline{3}]. \tag{39}$$

Это предложение в соединении с леммой п. 3 приводит к качественно новой теореме, окончательно разрешающей в известном смысле проблему классификации четырехмерных пространств Эйнштейна. Пользуясь обозначениями, получающимися, соответственно, из принятых выше в п. 3 простой заменой A на T, $\overline{T}$, ее можно высказать следующим образом.

Теорема III. *При $n = 4$, $s = -2$ имеются три типа пространств Эйнштейна. Арифметические и аналитические характеристики типов, соответственно, даются схемой:*

$$\boxed{R_{ij} - \frac{R}{4} g_{ij} = 0}\ \left|\ \begin{array}{ll} \mathrm{I} \left| \begin{array}{l} (33)\ H\varphi'(T) \neq 0,\ \textit{если}\ [111],\ [\overline{111}]; \\ (31)\ H = 0,\ \varphi'^2(T) \neq 0,\ \textit{если}\ [(11)1],\ [(\overline{11})\overline{1}]; \\ (00)\ \varphi''(T) = 0,\ \textit{если}\ [(111)],\ [(\overline{111})]. \end{array}\right. & (40.1) \\ \mathrm{II} \left| \begin{array}{l} (32)\ H\varphi'(T) = 0,\ \textit{если}\ [12],\ [\overline{12}]; \\ (10)\ \varphi''^2(T) = 0,\ \varphi''(T) \neq 0,\ \textit{если}\ [(21)],\ [(\overline{21})]. \end{array}\right. & (40.2) \\ \mathrm{III}\ \ (21)\ \varphi'^2(T) = 0,\ \varphi'(T) \neq 0,\ \textit{если}\ [3],\ [\overline{3}]. & (40.3) \end{array}\right.$$

Совместность налагаемых на фундаментальные тензоры дифференциальных условий (40.1), (40.2), (40.3) показывают примеры форм:

$$ds^2 = -(du')^2 - \left(\frac{\operatorname{sh}\frac{3u'}{2}}{\sqrt[3]{\operatorname{ch}\frac{3u'}{2}}}\right)^2 (du^2)^2 + 2\left(\operatorname{ch}\frac{3u^1}{2}\right)^{\frac{4}{3}} du^3du^4\,,$$

$$ds^2 = -\cos^2 u^4 du'^2 - e^{2u^4} du^{2^2} + 2du^3du^4, \tag{41}$$

$$ds^2 = -e^{\alpha u^4 + \beta}(2du'du^3 + Adu^{2^2}) + 2\left(B_1 e^{\alpha u^4} + B_2 e^{-\frac{\alpha}{2}u^4}\right) du^2du^3 +$$

$$+\left(C_1 e^{\alpha u^4} + C_2 e^{-\frac{\alpha}{2} u^4} - \frac{B_2^2}{2A} e^{-2\alpha u^4 - \beta}\right) du^{3^2} - du^{4^2},$$

где α, β, A, B_i, C_i — постоянные, причем

$$\alpha > 0, \qquad A > 0, \qquad C_1 e^{\alpha u^4} + C_2 e^{-\frac{\alpha}{2} u^4} - \frac{B_2^2}{2A} e^{-2\alpha u^4 - \beta} < 0,$$

которые обладают, соответственно, характеристиками из ряда (39). Каждая из трех указанных в теореме III совместных дифференциальных систем, являясь необходимым и достаточным условием принадлежности метрической формы ds^2 эйнштейновского пространства к одному из указанных трех классов, служит для разыскания основного тензора $g_{ij}(u)$ одного определенного класса пространства Эйнштейна. Это обстоятельство открывает возможность для изучения в отдельности любого из трех классов пространств, лежащих в основе построения принципа относительности.

Ни в одном из мемуаров, посвященных проблеме классификации эйнштейновских пространств, не получена характеризация метрических тензоров выделенных классов пространств, стало быть, не дано исчерпывающее решение вопроса.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. F. Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas, 1827.
2. B. Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, 1854.
3. П. И. Петров, Классификация трехмерных римановых пространств по их дифференциальным инвариантам, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 117, кн. 9, 1957, 119—121.
4. П. И. Петров, Классификация конформно-плоских римановых пространств, Чехослов. матем. ж., т. 11 (86), № 2, 1961, 161—164.
5. П. И. Петров, Инварианты и классификация дифференциальных квадратичных форм от четырех переменных, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 23, 1959, 387—420.
6. П. А. Широков, Тензорное исчисление, гл. III, Гостехиздат, М., 1934.
7. Г. Б. Гуревич, Основы теории алгебраических инвариантов, Гостехиздат, М., 1948, 338, зад. № 11.
8. Л. П. Эйзенхарт, Риманова геометрия, ИЛ, М., 1948, 117.

Поступила 9.III 1964 г.

Казань