1965 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 17, №
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Об одной теореме М. Бернацкого в теории однолистных функций

В. А. Похилевич

§ **1.** В своей работе [6] А. В. Гудман, применяя довольно сложные ра суждения, относящиеся к свойствам функции Грина и варьированию т чек ветвления аналитической функции, доказал следующую теорему, и пользованную М. Бернацким в одной из его работ [1].

Теорема (А. В. Гудман): *если $f(z)$, $f(0) = 0$, регулярна и однолист в круге $|z| < 1$, а λ — достаточно малое по модулю комплексное число, функция*

$$f^*(z) = f(z) - \lambda\frac{3f(u)f^2(z) - 2f^3(z)}{f(u)[f(u) - f(z)]^2} + zf'(z)\left\{I_1(u)\frac{3uz - 2z^2}{(u - z)^2}\lambda + \right.$$

$$+ I_2(u)\frac{z}{u - z}\lambda + \overline{I_1(u)}\frac{\bar{u}z - 2\bar{u}^2z^2}{(1 - \bar{u}z)^2}\bar{\lambda} + \overline{I_2(u)}\frac{\bar{u}z}{1 - \bar{u}z}\bar{\lambda} +$$

$$\left. + \operatorname{Re}(2I_1(u)\lambda + I_2(u)\lambda)\right\} + O(\lambda^2), \qquad (1$$

где u — произвольное фиксированное комплексное число, удовлетворяющ условию $0 < |u| < 1$,

$$I_1(u) = \frac{f^2(u)}{[uf'(u)]^3}, \qquad I_2(u) = \frac{2f''(u)f^2(u)}{u^2[f'(u)]^4},$$

— регулярна и однолистна в $|z| < 1$, причем $f^*(0) = 0$.

Здесь, как и в прочих аналогичных вариационных формулах, $O($ обозначает величину, непревосходящую по модулю $C|\lambda|^2$ в любой за кнутой области B, содержащейся в круге $|z| < 1$, где C — некоторая по жительная константа, зависящая от области B.

Мы докажем, что теорема А. В. Гудмана является следствием изве ной вариационной теоремы Г. М. Голузина ([3], стр. 63). Кроме того, докажем, что М. Бернацкий некорректно применил вышеуказанную т рему А. В. Гудмана, благодаря чему получил мнимое противоречие, д шее ему основание считать доказанной одну теорему [1], ошибочность торой недавно обнаружили [4] польские математики Кржиж и Леванд ский, построив контр-пример*. Однако, мы докажем, что эти математи незаслуженно приписывают М. Бернацкому ошибку, которой на самом д у него нет, не замечая той, о которой мы упомянули выше.

* Автору стало известно, что пример, опровергающий теорему М. Бернацк был построен независимо от польских математиков И. Е. Базилевичем летом 1963 г

Докажем теперь, что теорема А. В. Гудмана является следствием вышеупомянутой вариационной теоремы Г. М. Голузина. Для этого запишем формулу (1.1) в таком виде:

$$f^*(z) = f(z) - \lambda A \frac{3f(u) f^2(z) - 2f^3(z)}{f(u)[f(u) - f(z)]^2} + \lambda A z f'(z) \left[I_1(u) \frac{3uz - 2z^2}{(u-z)^2} + \right.$$

$$\left. + I_2(u) \frac{z}{u-z} \right] + \lambda \overline{A} z f'(z) \left[\overline{I_1(u)} \frac{\overline{u}z - 2\overline{u}^2 z^2}{(1-\overline{u}z)^2} + \overline{I_2(u)} \frac{\overline{u}z}{1-\overline{u}z} \right] +$$

$$+ \lambda z f'(z) \operatorname{Re}(2I_1(u) A + I_2(u) A) + O(\lambda^2), \tag{1.2}$$

где $\lambda > 0$ — достаточно малое, A — произвольное комплексное число.

Возьмем в качестве функции $F(z, \lambda)$, о которой говорится в теореме Г. М. Голузина, функцию

$$f(z) - \lambda A \frac{3f(u) f^2(z) - 2f^3(z)}{f(u)[f(u) - f(z)]^2} + O(\lambda^2).$$

Эта функция, при достаточно малых $\lambda > 0$, будет удовлетворять условиям теоремы Г. М. Голузина в кольце $|u| < |z| < 1$.

Найдем главную часть в разложении функции

$$\frac{q(z)}{zf'(z)} = -A \frac{3f(u) f^2(z) - 2f^3(z)}{f(u) zf'(z) [f(u) - f(z)]^2}$$

в ряд Лорана в кольце $|u| < |z| < 1$. Функция $\frac{q(z)}{zf'(z)}$ в круге $|z| < 1$ имеет полюс второго порядка в точке $z = u$, и поэтому ее главная часть в окрестности этой точки имеет вид:

$$S(z) = \frac{a_{-2}}{(u-z)^2} + \frac{a_{-1}}{z-u}.$$

Проделав соответствующие вычисления, получим для $S(z)$ выражение:

$$S(z) = -A \left[I_1(u) \frac{2u^2 - uz}{(u-z)^2} + I_2(u) \frac{u}{u-z} \right],$$

где

$$I_1(u) = \frac{f^2(u)}{[uf'(u)]^3}, \qquad I_2(u) = \frac{2f''(u) f^2(u)}{u^2 [f'(u)]^4}.$$

Отсюда следует, что

$$\overline{S\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} = \overline{A} \left[\overline{I_1(u)} \frac{\overline{u}z - 2\overline{u}^2 z^2}{(1-\overline{u}z)^2} + \overline{I_2(u)} \frac{\overline{u}z}{1-\overline{u}z} \right].$$

Согласно теореме Г. М. Голузина, варированная функция имеет следующий вид:

$$f^*(z) = f(z) - \lambda A \frac{3f(u) f^2(z) - 2f^3(z)}{f(u)[f(u) - f(z)]^2} + \lambda A z f'(z) \left[I_1(u) \frac{2u^2 - uz}{(u-z)^2} + \right.$$

$$\left. + I_2(u) \frac{u}{u-z} \right] + \lambda \overline{A} z f'(z) \left[\overline{I_1(u)} \frac{\overline{u}z - 2\overline{u}^2 z^2}{(1-\overline{u}z)^2} + \overline{I_2(u)} \frac{\overline{u}z}{1-\overline{u}z} \right] + O(\lambda^2). \tag{1.3}$$

Функция $f^*(z)$ регулярна и однолистна при $|z| < 1$, причем $f^*(0) = 0$. Легко проверить, что формула (1.3) равносильна следующей:

$$f^*(z) = f(z) - \lambda A \frac{3f(u) f^2(z) - 2f^3(z)}{f(u)[f(u) - f(z)]^2} +$$

$$+ \lambda A z f'(z) \left[I_1(u) \frac{3uz - 2z^2}{(u-z)^2} + I_2(u) \frac{z}{u-z} + 2I_1(u) + I_2(u) \right] +$$

$$+ \lambda \overline{A} z f'(z) \left[\overline{I_1(u)} \frac{\overline{u}z - 2\overline{u}^2 z^2}{(1-\overline{u}z)^2} + I_2(u) \frac{\overline{u}z}{1-\overline{u}z} \right] + O(\lambda^2). \qquad (1.4)$$

Подвергнем теперь функцию $f^*(z)$ преобразованию $f^*(ze^{i\lambda c})$, в котором c есть некоторая вещественная постоянная. Это равносильно замене функции $f(z)$ в (1.4) функцией

$$f(ze^{i\lambda c}) = f(z) + iz\lambda c f'(z) + O(\lambda^2).$$

При этом все члены в формуле (1.4), кроме первого, останутся без изменения. Затем выберем вещественную постоянную c так, чтобы в точности получить формулу (1.1).

Формула (1.4), если для $f^*(ze^{i\lambda c})$ сохранить прежнее обозначение $f^*(z)$, примет вид:

$$f^*(z) = f(z) - \lambda A \frac{3f(u) f^2(z) - 2f^3(z)}{f(u)[f(u) - f(z)]^2} + \lambda A z f'(z) \left[I_1(u) \frac{3uz - 2z^2}{(u-z)^2} + I_2(u) \frac{z}{u-z} \right] +$$

$$+ \lambda \overline{A} z f'(z) \left[\overline{I_1(u)} \frac{\overline{u}z - 2\overline{u}^2 z^2}{(1-\overline{u}z)^2} + \overline{I_2(u)} \frac{\overline{u}z}{1-\overline{u}z} \right] +$$

$$+ z f'(z) [\lambda A (2I_1(u) + I_2(u)) + i\lambda c] + O(\lambda^2). \qquad (1.5)$$

Положив в (1.5) $\lambda A = \mu$ и $\lambda c = -\operatorname{Im}(\mu(2I_1(u) + I_2(u))$, получим, с точностью до обозначений, формулу (1.1)*.

Заметим, что и некоторые другие вариационные формулы А. В. Гудмана для однолистных функций, могут быть получены из общей теоремы Г. М. Голузина. Например, формула (2.10), которая имеет вид:

$$f^*(z) = f(z) - \lambda \frac{f^2(z)}{f(u)[f(u) - f(z)]} + z f'(z) \left\{ \frac{\lambda f(u)}{[uf'(u)]^2} \frac{z}{u-z} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\overline{\lambda f(u)}}{[uf'(u)]^2} \right) \frac{\overline{u}z}{1-\overline{u}z} + \operatorname{Re}\left(\frac{\lambda f(u)}{[uf'(u)]^2} \right) \right\} + O(\lambda^2),$$

при помощи аналогичных вычислений получается из теоремы Г. М. Голузина, если взять в качестве функции $F(z, \lambda)$, о которой говорится в теореме Г. М. Голузина, функцию

$$f(z) - \lambda_1 A \frac{f^2(z)}{f(u)[f(u) - f(z)]} + O(\lambda_1^2),$$

где $\lambda = \lambda_1 A$, $\lambda_1 > 0$, A — комплексное число.

Недостатком формулы (1.1) А. В. Гудмана так же, как и формулы (2.10), является то, что они не определены при $u = 0$.

Если взять в качестве параметра $\lambda = \lambda_1 u$, что соответствует функции $F(z, \lambda_1)$ вида:

$$f(z) - \lambda_1 A u \frac{3f(u) f^2(z) - 2f^3(z)}{f(u)[f(u) - f(z)]^2} + O(\lambda_1^2),$$

* Автору стало известно, что аналогичное доказательство формулы (1.1) было выполнено в докторской диссертации И. А. Александровым в ноябре 1963 г. (Томск).

то тогда вариационная формула (1.1) превратится в следующую:

$$f^*(z)=f(z)-\widetilde{\lambda}_1 u\frac{3f(u)f^2(z)-2f^3(z)}{f(u)[f(u)-f(z)]^2}+\widetilde{\lambda}_1 zf'(z)\left[I_1(u)\frac{3uz-2z^2}{(u-z)^2}+I_2(u)\frac{z}{u-z}\right]+$$

$$+\widetilde{\lambda}_1 zf'(z)\left[\overline{I_1(u)}\frac{\overline{u}z-2\overline{u}^2z^2}{(1-\overline{u}z)^2}+\overline{I_2(u)}\frac{\overline{u}z}{1-\overline{u}z}\right]+$$

$$+zf'(z)\operatorname{Re}(2I_1(u)\widetilde{\lambda}_1+I_2(u)\widetilde{\lambda}_1)+O(\lambda_1^2),$$

где

$$I_1(u)=\frac{f^2(u)}{u^2[f'(u)]^3},\qquad I_2(u)=\frac{2f''(u)f^2(u)}{u[f'(u)]^4}.$$

Эта формула уже определена и при $u=0$.

§ **2.** Рассмотрим теперь вопрос о том, как применил М. Бернацкий теорему А. В. Гудмана. В статье [1] М. Бернацкий доказывает следующую теорему:

если $f(z)=a_1z+\ldots$ $(a_1\neq 0)$, *есть функция, регулярная и однолистная в круге* $|z|<R$, *то*

$$g(z)=\int_0^z\frac{f(t)}{t}\,dt \tag{2.1}$$

также регулярна и однолистна в этом круге ($R=1$). Эту теорему М. Бернацкий доказывает от противного, т. е. предполагает, что не все функции (2.1) однолистны в $|z|<1$, когда $f(z)$ пробегает весь класс S.

Тогда, по известной теореме Александера, все функции $g(z)$, во всяком случае, однолистны в круге $|z|<2-\sqrt{3}$, и легко прийти к заключению о существовании такой функции $f(z)$, для которой функция $g(z)$ обладает минимальным кругом однолистности, радиус которого r, очевидно, удовлетворяет условию $2-\sqrt{3}<r<1$.

Эту функцию $f(z)\in S$ назовем экстремальной.

Поскольку $g'(z)=\dfrac{f(z)}{z}\neq 0$ в $|z|<1$, то ясно, что образом окружности $|z|=r$ при отображении $w=g(z)$ может быть только аналитическая кривая, имеющая, по крайней мере, одну точку самосоприкосновения.

Пусть z_1 и z_2 — две такие точки окружности $|z|=r$, что для них $g(z_1)=$ $=g(z_2)$.

Обозначим дугу круга $|z|=r$, соединяющую точки z_1 и z_2 и не содержащую никаких других аналогичных точек, через c.

Тогда, очевидно,

$$\int_c\frac{f(z)}{z}\,dz=0. \tag{2.2}$$

Применяя к (2.2) вариационные формулы М. Шиффера и А. В. Гудмана, М. Бернацкий приходит к заключению, что экстремальная функция $f(z)$ должна удовлетворять следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{u^2[f'(u)]^2}{f^2(u)}\frac{1}{I_2}\int_c\frac{f(u)f(z)}{f(z)-f(u)}\frac{dz}{z}+\frac{1}{I_2}\int_c\frac{uf'(z)}{u-z}dz+\frac{1}{\overline{I}_2}\int_c\frac{\overline{z}\,\overline{f'(z)}}{\frac{1}{u}-\overline{z}}d\overline{z}; \tag{2.3}$$

$$-\left[\frac{uf'(u)}{f(u)}\right]^2\frac{1}{I_2}\int_c\frac{3f(u)f^2(z)-2f^3(z)}{[f(u)-f(z)]^2}\frac{dz}{z}+$$

$$+\frac{1}{f_2}\int\limits_c f'(z)\left[\frac{3uz-2z^2}{(u-z)^2}+\frac{2uf''(u)}{f'(u)}\frac{z}{u-z}\right]dz+$$

$$+\frac{1}{f_2}\int\limits_c \overline{f'(z)}\left[\frac{u\bar{z}-2u^2\bar{z}^2}{(1-u\bar{z})^2}+\frac{2uf''(u)}{f'(u)}\frac{u\bar{z}}{1-u\bar{z}}\right]d\bar{z}+$$

$$+\frac{2(f_2-f_1)}{f_2}\frac{(uf'(u))^3}{f^2(u)}\cdot\mathrm{Re}\left|\frac{f^2(u)}{[uf'(u)]^3}+\frac{f''(u)f^2(u)}{u^2[f'(u)]^4}\right|=0, \qquad (2.4)$$

где $f_k=f(z_k)$, $k=1, 2$.

Ссылаясь на аналитическую теорию дифференциальных уравнений ([2], стр. 21), а также на результат Г. М. Голузина ([3], стр. 75), М. Бернацкий, на основе анализа дифференциального уравнения (2.3), приходит к заключению, что экстремальная функция $w=f(u)$ отображает круг $|u|<1$ на всю w-плоскость с конечным числом разрезов по аналитическим дугам, причем если u_0 ($|u_0|=1$) — точка, соответствующая концу разреза, то $f'(u_0)=0$. Этот вывод позволяет ему получить из (2.3) соотношение:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{f_2}\int\limits_c\frac{u_0+z}{u_0-z}f'(z)\,dz\right)=0, \qquad (2.5)$$

что равносильно равенству:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{f_2}\int\limits_c\frac{z}{u_0-z}f'(z)\,dz\right)=-\frac{f_2-f_1}{2f_2}. \qquad (2.6)$$

Используя затем уравнение (2.4), М. Бернацкий получает мнимое противоречие на слагаемом, содержащем вещественный множитель, чем и заканчивает свое доказательство.

Ошибка М. Бернацкого состоит в том, что он выносит произвольное комплексное постоянное в вариационной формуле Гудмана в члене, содержащем вещественный множитель, за знак вещественной части, благодаря чему, в дальнейшем, он не может освободиться от члена с вещественной частью, на котором и строит противоречие.

Если правильно пользоваться вариационной формулой Гудмана, то, применяя к ней условие (2.2), а также заменяя произвольное комплексное постоянное A на $\frac{A}{I_2(u)}$, получим соотношение, аналогичное соотношению, полученному М. Бернацким из вариационной формулы М. Шиффера:

$$\frac{dz_2}{z_2}+\lambda\left\{A\left(-\frac{u^2[f'(u)]^4}{2f''(u)f^3(u)}\frac{1}{f_2}\int\limits_c\frac{3f(u)f^2(z)-2f^3(z)}{[f(u)-f(z)]^2}\frac{dz}{z}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{f_2}\int\limits_c f'(z)\left[\frac{f'(u)}{2uf''(u)}\frac{3uz-2z^2}{(u-z)^2}+\frac{z}{u-z}\right]dz\right)+$$

$$+\overline{A}\frac{1}{f_2}\int\limits_c f'(z)\left[\frac{\overline{f'(u)}}{2\bar{u}\,\overline{f''(u)}}\cdot\frac{\bar{u}z-2\bar{u}^2z^2}{(1-\bar{u}z)^2}+\frac{\bar{u}z}{1-\bar{u}z}\right]dz+$$

$$\left.+\frac{f_2-f_1}{f_2}\,\mathrm{Re}\left(A\frac{f'(u)}{uf''(u)}+A\right)\right\}+O(\lambda^2)=0.$$

Отсюда, рассуждениями, аналогичными рассуждениям М. Бернацкого в случае формулы М. Шиффера, получаем следующее равенство:

$$\operatorname{Re}\left\{A\left(-\frac{u^2[f'(u)]^4}{2f''(u)f^3(u)}\frac{1}{f_2}\int\limits_c \frac{3f(u)f^2(z)-2f^3(z)}{[f(u)-f(z)]^2}\frac{dz}{z}+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{f_2}\int\limits_c f'(z)\left[\frac{f'(u)}{2uf''(u)}\frac{3uz-2z^2}{(u-z)^2}+\frac{z}{u-z}\right]dz+ \tag{2.7}$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\bar{f}_2}\int\limits_c \overline{f'(z)}\left[\frac{f'(u)}{2uf''(u)}\frac{u\bar{z}-2u^2\bar{z}^2}{(1-u\bar{z})^2}+\frac{u\bar{z}}{1-u\bar{z}}\right]d\bar{z}+\frac{f_2-f_1}{f_2}\left(\frac{f'(u)}{uf''(u)}+1\right)\right)\right\}=0,$$

справедливое при любом A.

В силу произвольности $\arg A$, из (2.7) получаем следующее уравнение, вместо уравнения (2.4), полученного М. Бернацким:

$$-\frac{u^2[f'(u)]^4}{2f''(u)f^3(u)}\frac{1}{f_2}\int\limits_c \frac{3f(u)f^2(z)-2f^3(z)}{[f(u)-f(z)]^2}\frac{dz}{z}+$$

$$+\frac{1}{f_2}\int\limits_c f'(z)\left[\frac{f'(u)}{2uf''(u)}\frac{3uz-2z^2}{(u-z)^2}+\frac{z}{u-z}\right]dz+ \tag{2.8}$$

$$+\frac{1}{\bar{f}_2}\int\limits_c \overline{f'(z)}\left[\frac{f'(u)}{2uf''(u)}\frac{u\bar{z}-2u^2\bar{z}^2}{(1-u\bar{z})^2}+\frac{u\bar{z}}{1-u\bar{z}}\right]d\bar{z}+\frac{f_2-f_1}{f_2}\left(\frac{f'(u)}{uf''(u)}+1\right)=0.$$

Если $u\,(|u|=1)$ соответствует концу разреза и если принять, что $f'(u)=0$, тогда из (2.8) получим:

$$\frac{1}{f_2}\int\limits_c \frac{z}{u-z}f'(z)\,dz+\frac{1}{\bar{f}_2}\int\limits_c \frac{\bar{z}}{\frac{1}{u}-\bar{z}}\overline{f'(z)}\,d\bar{z}+\frac{f_2-f_1}{f_2}=0. \tag{2.9}$$

Отсюда, учитывая, что $u\bar{u}=1$, находим:

$$\frac{1}{f_2}\int\limits_c \frac{z}{u-z}f'(z)\,dz+\frac{1}{\bar{f}_2}\int\limits_c \frac{\bar{z}\,\overline{f'(z)}}{\bar{u}-\bar{z}}\,d\bar{z}+\frac{f_2-f_1}{f_2}=0. \tag{2.10}$$

Соотношение (2.10) равносильно следующему:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{f_2}\int\limits_c \frac{z}{u-z}f'(z)\,dz\right)=-\frac{f_2-f_1}{2f_2}. \tag{2.11}$$

Но это та же формула (2.6), которую получил М. Бернацкий, применяя вариационную формулу М. Шиффера.

Поэтому, при корректном применении формулы А. В. Гудмана, мы не получаем ничего нового по сравнению с тем, что получил М. Бернацкий при применении формулы Шиффера, т. е. в работе М. Бернацкого [1] теорема не доказана (теперь мы знаем, что она не может быть доказана).

Польские математики К. Кржиж и Ш. Левандовский обнаружили ошибочность доказываемой М. Бернацким теоремы, построив контр-пример. Однако, они усматривают ошибку в рассуждениях М. Бернацкого в том, что он полагает $f'(u)=0$ в каждой точке u окружности $|u|=1$, соответствующей концу разреза при отображении экстремальной функцией $w=f(u)$ круга $|u|<1$.

С этим возражением нельзя согласиться, так как в основе рассуждений М. Бернацкого в этом случае лежит тот факт, что особые точки решения дифференциального уравнения (2.3) имеют алгебраический характер.

Действительно, обратимся к дифференциальному уравнению (2.3).

Введем обозначения: $f(u) = w$, $F(w) = \frac{1}{f_2} \int\limits_c \frac{wf(z)}{f(z) - w} \frac{dz}{z}$,

$$\Phi(u) = -\frac{1}{f_2} \int\limits_c \frac{uf'(z)}{u - z} dz - \frac{1}{\bar{f}_2} \int\limits_c \frac{\bar{z}\overline{f'(z)}}{\frac{1}{u} - \bar{z}} d\bar{z}.$$

Тогда уравнение (2.3) примет вид:

$$\left(\frac{u}{w} w'\right)^2 F(w) = \Phi(u). \tag{2.12}$$

Функция $F(w)$ определена во всей плоскости w, за исключением некоторой дуги, определяемой уравнением $w = f(z)$, где $z \in c$.

Кроме того, $F(0) = 0$ и $F(w) \to 0$ при $w \to \infty$.

Последнее утверждение видно из следующего представления $F(w)$:

$$F(w) = \frac{1}{f_2} \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{wf(z)}{f(z) - w} \frac{dz}{z} = \frac{1}{f_2} \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{f(z)}{\frac{f(z)}{w} - 1} \frac{dz}{z} \to -\frac{1}{f_2} \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{f(z)}{z} dz = 0 \quad \text{при } |w| \to \infty.$$

Функция $\Phi(u)$ определена во всей плоскости u, за исключением разрезов по дуге c и дуге c', полученной из c инверсией относительно окружности $|u| = 1$.

Далее, функция $\Phi(u)$ принимает на $|u| = 1$ вещественные значения.

Действительно, если $|u| = 1$, то $\Phi(u)$ имеет следующий вид (здесь учитываем, что на окружности $|u| = 1$ выполняется условие $u\bar{u} = 1$):

$$\Phi(u) = -\frac{1}{f_2} \int\limits_c \frac{uf'(z)}{u - z} dz - \frac{1}{\bar{f}_2} \int\limits_c \frac{\bar{z}\,\overline{f'(z)}}{\bar{u} - \bar{z}} d\bar{z} = -\frac{1}{f_2} \int\limits_c \frac{zf'(z)}{u - z} dz -$$

$$-\frac{1}{\bar{f}_2} \int\limits_c \frac{\bar{z}\,\overline{f'(z)}}{\bar{u} - \bar{z}} d\bar{z} - \frac{f_2 - f_1}{f_2} = -2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{f_2} \int\limits_c \frac{zf'(z)}{u - z} dz\right) - \frac{f_2 - f_1}{f_2}. \tag{2.13}$$

Докажем, что при $|u| = 1$ справедливо неравенство $\Phi(u) \leqslant 0$. Для этого воспользуемся следующей теоремой ([3], стр. 72 (27)); если $f(z) \in S$, то при достаточно малых $t > 0$ и любом вещественном φ функция

$$f_*(z) = f(z) + t \left| f(z) - zf'(z) \frac{1 + ze^{i\varphi}}{1 - ze^{i\varphi}} + O(t^2) \right.$$

определяет также функцию класса S.

Подставляя $f_*(z)$ в соотношение (2.2) и варьируя z_2, получим:

$$\frac{dz_2}{z_2} - t\frac{1}{f_2} \int\limits_c f'(z) \frac{1 + ze^{i\varphi}}{1 - ze^{i\varphi}} dz + O(t^2) = 0.$$

В силу экстремальности функции $f(z)$, необходимо, чтобы выполнялось соотношение:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{f_2} \int\limits_c f'(z) \frac{1 + ze^{i\varphi}}{1 - ze^{i\varphi}} dz\right) \geqslant 0. \tag{2.14}$$

В противном случае, мы пришли бы к уменьшению $|z_2|$, что противоречит предположению относительно $|z_2|$.

Функция $\Phi(u)$ на окружности $|u|=1$ может быть представлена следующим образом:

$$\Phi(u) = -2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{f_2}\int_c \frac{zf'(z)}{u-z}\,dz\right) - \frac{f_2-f_1}{f_2} =$$

$$= -2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{f_2}\int_c \frac{u+z}{u-z}f'(z)\,dz\right) + 2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{f_2}\int_c \frac{z}{u-z}f'(z)\,dz\right) +$$

$$+\frac{f_2-f_1}{f_2} = -2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{f_2}\int_c \frac{u+z}{u-z}f'(z)\,dz\right) - \Phi(u).$$

Отсюда

$$\Phi(u) = -\mathrm{Re}\left(\frac{1}{f_2}\int_c \frac{u+z}{u-z}f'(z)\,dz\right).$$

В силу неравенства (2.14), заключаем, что на окружности $|u|=1$ имеем $\Phi(u)\leqslant 0$, что, в частности, совпадает с результатом М. Бернацкого для точки $u(|u|=1)$, соответствующей концу разреза (см. (2.6)), если принять, что $f'(u)=0$.

Это является еще одним подтверждением правильности его утверждений.

Из свойств функций $F(w)$ и $\Phi(u)$ следует, что к функции $w=f(u)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению (2.12) или, что то же самое, уравнению (2.3), применим результат Г. М. Голузина ([3], стр. 72—82), состоящий в следующем: функция $w=f(u)$ может иметь на $|u|=1$ только алгебраические особые точки, каковых наверно конечное число; производная $f'(u)$ экстремальной функции имеет нули на $|u|=1$, а именно, простые нули в точках, соответствующих концам граничных разрезов.

В заключение, мы формулируем теорему, вытекающую из предыдущих исследований, которую по праву следует назвать теоремой Бернацкого.

Теорема (М. Бернацкий): *Обозначим через S класс регулярных и однолистных в круге $|z|<1$ функций $f(z)$, нормированных условием $f(0)=0$, а через $\widetilde{S}$ класс функций $\varphi(z)$, получаемый из S при помощи интегрального преобразования:*

$$\varphi(z) = \int_0^z \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

Тогда существует такая константа R_B, $0<R_B<1$, и такая функция $f_B(z)\in S$, что:

1) $\varphi_B(z) = \int_0^z \frac{f_B(t)}{t}\,dt$ *однолистна в круге $|z|<R_B$ и неоднолистна в круге большего радиуса;*

2) *если $\varphi(z)\in\widetilde{S}$, то $\varphi(z)$ однолистна, по крайней мере, в круге $|z|<R_B$;*

3) *функция $f_B(u)$ удовлетворяет дифференциальным уравнениям* (2.3) *и* (2.8).

Функция $w=f_B(u)$ отображает круг $|u|<1$ на всю w-плоскость с конечным числом аналитических разрезов.

Если u_0, $|u_0| = 1$, есть аффикс конца одного из этих разрезов, то с ведливо соотношение $f'_B(u_0) = 0$.

Константа R_B и функция $f_B(z)$ в настоящее время неизвестны.

В заключение выражаю благодарность моему руководителю Змор чу В. А. за постановку вопроса и за указания при выполнении раб

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Biernacki, Sur L'integrale des fonctions univalentes, Bull. Acad. P Sci., Ser. sci. math. astr. et phys., Vol. VIII, N 1, 1960.
2. В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных у нений, Гостехиздат, М.—Л., 1941.
3. Г. М. Голузин, Некоторые вопросы теории однолистных функций, Тр тем. ин-та им. Стеклова, 27, 1949.
4. J. Krzyz and Z. Lewandowski, On the Integral of Univalent Funct Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. math. astr. et. phys., Vol. XI, N 7, 1963.
5. M. Schiffer, Variation of the Green function and the theory of the p-va functions, Amer. Journ. Math., 65, 1943, 341—360.
6. A. W. Goodman, On variation formulas for univalent functions, Trans. A Math. Soc., 89, 1958, 285—294.

Поступила 22.II 1964 г.
Киев