Простой пример непрерывной периодической функции, не разлагающейся в ряд Фурье

В. К. Дзядык

Одним из наиболее важных вопросов в теории рядов Фурье является вопрос о сходимости этих рядов.

В 1876 г. дю-Буа-Реймонд впервые построил пример непрерывной периодической функции $f(x)$, ряд Фурье которой расходится в некоторых точках. С тех пор был построен ряд других примеров подобного рода, наиболее известными из которых являются примеры Лебега и Фейера. В этой заметке мы построим пример, который проще всех примеров, построенных ранее.

Теорема. *Ряд Фурье четной, непрерывной периода 2π функции $f(x)$, определенной на $[0, \pi]$ при помощи равенства*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin 2^{k^3} x, \tag{1}$$

расходится в точке $x = 0$.

Действительно, обозначим через $\varphi_{2m}(x)$ четную периода 2π функцию, равную $\sin 2mx$ при $x \in [0, \pi]$, и пусть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_k \cos kx; \qquad \varphi_{2m}(x) \sim \frac{a_0^{(2m)}}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_k^{(2m)} \cos kx, \qquad m = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

S_N и $S_N^{(2m)}$ — частные суммы рядов Фурье этих функций в точке $x = 0$ так что,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \varphi_{2^{k^3}}(x); \qquad S_N^{(2m)} = \frac{a_0^{(2m)}}{2} + \sum_{k=1}^{N} a_k^{(2m)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{2m}(x) D_N(x)\, dx,$$

$$S_N = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_N(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{2^{k^3}}(x) D_N(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} S_N^{(2^{k^3})}, \tag{3}$$

где $D_N(x)$ — ядро Дирихле порядка N. Учитывая, что

$$a_k^{(2m)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2mx \cos kx dx = \begin{cases} 0, & \text{если } k \text{ четное}, \\ \dfrac{2}{\pi} \left(\dfrac{1}{2m+k} + \dfrac{1}{2m-k} \right), & \text{если } k \text{ нечетное}, \end{cases}$$

получим для случаев, когда $N < m$, $N = m$ и $N > 2m$ соответственно неравенства

$$S_{2N}^{(2m)} = a_1^{(2m)} + a_3^{(2m)} + \ldots + a_{2N-1}^{(2m)} = \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2m+2i-1} + \frac{1}{2m-2i+1}\right) > 0,$$

$$\text{если } N < m, \tag{4}$$

$$S_{2m}^{(2m)} = \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2m+2i-1} + \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2(m-i+1)-1} >$$

$$> \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2j-1} > \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j} > \frac{1}{\pi}\ln 2m - 1\,, \tag{5}$$

$$S_{2N}^{(2m)} = \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{2m}\frac{1}{2m+2i-1} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2j-1} - \frac{2}{\pi}\sum_{i=m+1}^{2m}\frac{1}{2(i-m)-1} -$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{i=2m+1}^{N}\left(\frac{1}{2i-1-2m} - \frac{1}{2i-1+2m}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{2m}\frac{1}{2m+2i-1} - \frac{2}{\pi}\sum_{i=2m+1}^{N}\frac{4m}{(2i-1)^2-4m^2} > \frac{1}{\pi} - \frac{16m}{\pi}\sum_{i=2m+1}^{N}\frac{1}{(2i-1)^2} >$$

$$> \frac{1}{\pi} - \frac{16m}{\pi}\sum_{i=2m+1}^{\infty}\frac{1}{(2i-2)(2i-1)} > \frac{1}{\pi} - \frac{16m}{\pi}\cdot\frac{1}{4m} > -1, \text{ если } N > 2m. \tag{6}$$

Вследствие этих неравенств для подпоследовательности $S_{2^{n^3}}$ частных сумм ряда Фурье функции $f(x)$ в точке $x = 0$ будем иметь

$$S_{2^{n^3}} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}S_{2^{n^3}}^{(2^{k^3})} + \frac{1}{n^2}S_{2^{n^3}}^{(2^{n^3})} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}S_{2^{n^3}}^{(2^{k^3})} >$$

$$> -\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{\pi}\ln 2^{n^3} - 1\right) > -\frac{\pi^2}{6} + \frac{\ln 2}{\pi}n \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

А это и означает, что ряд Фурье функции $f(x)$ в точке $x=0$ расходится.

Поступила 25. III 1965 г.
Киев

Об одном обобщении теоремы Келлога

Р. Н. Ковальчук

Пусть G — односвязная область плоскости z, ограниченная спрямляемой кривой Жордана C. Через $\vartheta = \vartheta(s)$ будем обозначать угол, образуемый вещественной осью с касательной к C в точке с дуговой координатой s.