получим для случаев, когда $N < m$, $N = m$ и $N > 2m$ соответственно неравенства

$$S_{2N}^{(2m)} = a_1^{(2m)} + a_3^{(2m)} + \ldots + a_{2N-1}^{(2m)} = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2m+2i-1} + \frac{1}{2m-2i+1} \right) > 0,$$

$$\text{если } N < m, \qquad (4)$$

$$S_{2m}^{(2m)} = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2m+2i-1} + \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2(m-i+1)-1} >$$

$$> \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2j-1} > \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j} > \frac{1}{\pi} \ln 2m - 1, \qquad (5)$$

$$S_{2N}^{(2m)} = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{2m} \frac{1}{2m+2i-1} + \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2j-1} - \frac{2}{\pi} \sum_{i=m+1}^{2m} \frac{1}{2(i-m)-1} -$$

$$- \frac{2}{\pi} \sum_{i=2m+1}^{N} \left(\frac{1}{2i-1-2m} - \frac{1}{2i-1+2m} \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{2m} \frac{1}{2m+2i-1} - \frac{2}{\pi} \sum_{i=2m+1}^{N} \frac{4m}{(2i-1)^2-4m^2} > \frac{1}{\pi} - \frac{16m}{\pi} \sum_{i=2m+1}^{N} \frac{1}{(2i-1)^2} >$$

$$> \frac{1}{\pi} - \frac{16m}{\pi} \sum_{i=2m+1}^{\infty} \frac{1}{(2i-2)(2i-1)} > \frac{1}{\pi} - \frac{16m}{\pi} \cdot \frac{1}{4m} > -1, \text{ если } N > 2m.$$

$$(6)$$

Вследствие этих неравенств для подпоследовательности $S_{2^{n^3}}$ частных сумм ряда Фурье функции $f(x)$ в точке $x = 0$ будем иметь

$$S_{2^{n^3}} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} S_{2^{n^3}}^{(2^{k^3})} + \frac{1}{n^2} S_{2^{n^3}}^{(2^{n^3})} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} S_{2^{n^3}}^{(2^{k^3})} >$$

$$> -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{\pi} \ln 2^{n^3} - 1 \right) > -\frac{\pi^2}{6} + \frac{\ln 2}{\pi} n \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

А это и означает, что ряд Фурье функции $f(x)$ в точке $x = 0$ расходится.

Поступила 25. III 1965 г.
Киев

Об одном обобщении теоремы Келлога

Р. Н. Ковальчук

Пусть G — односвязная область плоскости z, ограниченная спрямляемой кривой Жордана C. Через $\vartheta = \vartheta(s)$ будем обозначать угол, образуемый вещественной осью с касательной к C в точке с дуговой координатой s.

Функцию, которая однолистно и конформно отображает единичный круг $D = \{w : |w| < 1\}$ на область G, обозначим через $z = \psi(w)$.

Келлог доказал теорему [6], которая устанавливает связь между непрерывными свойствами функции $\vartheta(s)$ и непрерывными свойствами на окружности $\gamma = \{w : |w| = 1\}$ производной $\psi'(w)$.

Теорема Келлога утверждает, что если функция $\vartheta(s) \in H^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, то функция $\psi'(w)$ принадлежит тому же классу H^α.

С. Варшавским [5], С. Я. Альпером [1], Я. Л. Геронимусом [2], Оу Со-Мо [7] и др. были получены обобщения этой теоремы. Отметим, что наиболее общими являются результаты, полученные Геронимусом и Оу Со-Мо. Так имеет место следующая

Теорема (Геронимус — Оу Со-Мо). *Пусть G односвязная область плоскости z, ограниченная замкнутой спрямляемой кривой Жордана. Если $\vartheta^{(n)}(s)$ имеет модуль непрерывности $\omega(\vartheta^{(n)}, t)$, который удовлетворяет условию*

$$\int_0^1 \frac{\omega(\vartheta^{(n)}, t)}{t}\, dt < \infty, \tag{1}$$

то $\psi^{(n+1)}(w)$ непрерывна на $\overline{D} = \{w : |w| \leqslant 1\}$ и удовлетворяет неравенству

$$\omega(\psi^{(n+1)}, t) \leqslant A_1 \left[\int_0^t \frac{\omega(\vartheta^{(n)}, u)}{u}\, du + t \int_t^1 \frac{\omega(\vartheta^{(n)}, u)}{u^2}\, du + t \log \frac{1}{t} \right]. \tag{2}$$

Более того $\psi'(w) \neq 0$ в $\overline{D}$, если $n \geqslant 1$. Из этой теоремы следует, что если $\vartheta(s) \in H^1$, то модуль непрерывности $\psi'(w)$ на окружности γ удовлетворяет неравенству $\omega(\psi', t) \leqslant A_2 t \log \frac{1}{t}$, т. е. в этом случае мы не получаем такого симметричного результата, как для случая $0 < \alpha < 1$.

В настоящей заметке показано, что если рассматривать вторые модули непрерывности изучаемых функций, то и для случая $\alpha = 1$ мы получим такие же симметричные результаты, как и для случая $0 < \alpha < 1$. Имеет место следующая

Теорема. *Если функция $z = \psi(w)$, аналитическая в $D = \{w : |w| < 1\}$, однолистно отображает круг на область G, ограниченную замкнутой гладкой кривой Жордана C, у которой угол $\vartheta(s)$ наклона касательной к вещественной оси, как функция длины дуги s на C, имеет второй модуль непрерывности $\omega_2(\vartheta, t)$, удовлетворяющий неравенству*

$$\omega_2(\vartheta, t) \leqslant A_3 \cdot t^\alpha, \qquad 0 < \alpha < 2, \tag{3}$$

то $\psi'(w)$ непрерывна на $\overline{D}$ и на $\gamma = \{w : |w| = 1\}$

$$\omega_2(\psi', t) \leqslant A_4 \cdot t^\alpha. \tag{4}$$

Доказательство. Так как функция $z = \psi(w)$ однолистно отображает круг D на область G, ограниченную замкнутой гладкой кривой Жордана C, то при $w \in \gamma$ между $\psi'(w)$ и $\vartheta(s)$ существует следующая связь (см. напр., [3], стр. 466)

$$\arg \psi'(w) = \vartheta[s(w)] - \arg w - \frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

Поэтому имеем

$$\frac{\left| \arg \psi'(e^{i\theta_1}) - 2 \arg \psi'\left(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right) + \arg \psi'(e^{i\theta_2}) \right|}{|\theta_2 - \theta_1|^\alpha} =$$

$$= \frac{\left|\vartheta\left[s\left(e^{i\theta_1}\right)\right] - 2\vartheta\left[s\left(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right)\right] + \vartheta\left[s\left(e^{i\theta_2}\right)\right]\right|}{|\theta_2-\theta_1|^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left|\vartheta\left[s\left(e^{i\theta_1}\right)\right] - 2\vartheta\left[\frac{s\left(e^{i\theta_1}\right)+s\left(e^{i\theta_2}\right)}{2}\right] + \vartheta\left[s\left(e^{i\theta_2}\right)\right]\right|}{\left|s\left(e^{i\theta_2}\right)-s\left(e^{i\theta_1}\right)\right|^\alpha} \cdot \frac{\left|s\left(e^{i\theta_2}\right)-s\left(e^{i\theta_1}\right)\right|^\alpha}{|\theta_2-\theta_1|^\alpha} +$$

$$+ \frac{\left|\vartheta\left[\frac{s\left(e^{i\theta_1}\right)+s\left(e^{i\theta_2}\right)}{2}\right] - \vartheta\left[s\left(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right)\right]\right|}{|\theta_2-\theta_1|^\alpha} = P_1 + 2P_2. \tag{6}$$

Если $0 < \alpha < 1$, то справедливость теоремы вытекает из связи между первым и вторым модулем (см., например, [4] стр. 119) и теоремы Келлога.

Таким образом, нам достаточно рассматривать $1 \leqslant \alpha < 2$.

Если теперь $1 \leqslant \alpha < 2$, то из условия (3) следует, что $\vartheta(s) \in H^\beta$ при любом $0 < \beta < 1$. Следовательно, по теореме Келлога $\psi'(w)$ будет непрерывной на $\overline{D}$, а поэтому $s(e^{i\theta}) \in H^1$, т. е.

$$\left|\frac{s\left(e^{i\theta_2}\right)-s\left(e^{i\theta_1}\right)}{\theta_2-\theta_1}\right| \leqslant A_5. \tag{7}$$

Так по условию (3)

$$\left|\vartheta\left[s\left(e^{i\theta_1}\right)\right] - 2\vartheta\left[\frac{s\left(e^{i\theta_1}\right)+s\left(e^{i\theta_2}\right)}{2}\right] + \vartheta\left[s\left(e^{i\theta_2}\right)\right]\right| \leqslant A_3\left|s\left(e^{i\theta_1}\right)-s\left(e^{i\theta_2}\right)\right|^\alpha,$$

то, пользуясь неравенством (7), получим

$$P_1 \leqslant A_3 \cdot A_5^\alpha = A_6. \tag{8}$$

Оценим теперь P_2. Так как $\omega_2(\vartheta, t) \leqslant A_3 \cdot t^\alpha$, где $1 \leqslant \alpha < 2$, то $\omega_1(\vartheta, t) \leqslant A_7 t^\beta$, где β — любое $0 < \beta < 1$, если $\alpha = 1$, и $\omega_1(\vartheta, t) \leqslant A_7' t$, если $\alpha > 1$.

Следовательно можем считать, что

$$\vartheta(s) \in \begin{cases} H^{\frac{1}{\beta+1}}, & \text{при } \alpha = 1 \\ H^1, & \text{при } \alpha > 1, \end{cases}$$

где β — произвольное положительное число.

Поэтому при $\alpha = 1$ будем иметь

$$\begin{aligned} &\left|\vartheta\left[\frac{s\left(e^{i\theta_1}\right)+s\left(e^{i\theta_2}\right)}{2}\right] - \vartheta\left[s\left(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right)\right]\right| \leqslant \\ &\leqslant A_8\left|\frac{s\left(e^{i\theta_1}\right)+s\left(e^{i\theta_2}\right)}{2} - s\left(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right)\right|^{\frac{1}{\beta+1}} \leqslant \\ &\leqslant A_9\left|s\left(e^{i\theta_1}\right)+s\left(e^{i\theta_2}\right) - 2s\left(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right)\right|^{\frac{1}{\beta+1}} = \\ &= A_9\left|\int\limits_{\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}^{\theta_2}\left[\sigma'(t) - \sigma'\left(t - \frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)\right]dt\right|^{\frac{1}{\beta+1}}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\sigma(t) = s(e^{it})$.

Поскольку $\sigma(\theta)=\int\limits_{\theta_0}^{\theta}|\psi'(e^{it})|\,dt$, то $\sigma'(\theta)=|\psi'(e^{i\theta})|$. И так как $\psi'(e^{i\theta})\in H^{\beta}$, где $0<\beta<1$, то и $\sigma'(\theta)\in H^{\beta}$.

Поэтому из (9) получаем

$$\left|\vartheta\left[\frac{s(e^{i\theta_1})+s(e^{i\theta_2})}{2}\right]-\vartheta\left[s\left(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right)\right]\right|\leqslant$$

$$\leqslant A_{10}\left\{\left|\int\limits_{\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}^{\theta_2}|\theta_2-\theta_1|^{\beta}dt\right|\right\}^{\frac{1}{\beta+1}}\leqslant A_{11}|\theta_2-\theta_1|.$$

Следовательно, при $\alpha=1$

$$P_2\leqslant\frac{A_{11}|\theta_2-\theta_1|}{|\theta_2-\theta_1|}=A_{11}. \tag{10}$$

Если же $\alpha>1$, то по теореме Келлога $\psi'(e^{i\theta})\in H^{\alpha-1}$. Следовательно и $\sigma'(t)\in H^{\alpha-1}$. Поэтому получаем

$$\left|\vartheta\left[\frac{s(e^{i\theta_1})+s(e^{i\theta_2})}{2}\right]-\vartheta\left[s\left(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right)\right]\right|\leqslant$$

$$\leqslant A_{12}\left|\frac{s(e^{i\theta_1})+s(e^{i\theta_2})}{2}-s\left(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant A_{13}\left|\int\limits_{\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}^{\theta_2}\left[\sigma'(t)-\sigma'\left(t-\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)\right]dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant A_{14}\left|\int\limits_{\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}^{\theta_2}|\theta_2-\theta_1|^{\alpha-1}\,dt\right|\leqslant A_{15}|\theta_2-\theta_1|^{\alpha}.$$

Следовательно и для $\alpha>1$ имеем

$$P_2\leqslant\frac{A_{15}|\theta_2-\theta_1|^{\alpha}}{|\theta_2-\theta_1|^{\alpha}}=A_{15}. \tag{11}$$

Пользуясь неравенствами (8), (10) и (11), из (6) получаем

$$\left|\arg\psi'(e^{i\theta_1})-2\arg\psi'\left(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right)+\arg\psi'(e^{i\theta_2})\right|\leqslant A_{16}|\theta_2-\theta_1|^{\alpha},$$

т. е.

$$\omega_2(\arg\psi',t)\leqslant A_{16}t^{\alpha}. \tag{12}$$

Рассмотрим теперь функцию $F(w)=-i\log\psi'(w)$. Функция $F(w)$ является аналитической в $D=\{w:|w|<1\}$. Так как $\operatorname{Re}F(w)=\arg\psi'(w)$ и функция $\arg\psi'(w)$ на γ имеет второй модуль непрерывности $\omega_2(\arg\psi',t)$, который удовлетворяет неравенству (12), то и функция $\operatorname{Im}F(w)$ также будет иметь второй модуль непрерывности, который будет удовлетворять неравенству (12) (см. например, [4], стр. 405). Следовательно, для функции $F(w)$ также имеем

$$\omega_2(F,t)\leqslant A_{17}\cdot t^{\alpha}. \tag{13}$$

Таким образом мы показали, что функция $\log\psi'(w)$ имеет второй модуль непрерывности $\omega_2(\log\psi', t)$, который удовлетворяет неравенству

$$\omega_2(\log\psi', t) \leqslant A_{17}\cdot t^{\alpha}. \tag{14}$$

Так как

$$\psi'(w) = \exp\{\log\psi'(w)\},$$

то, пользуясь неравенством (14), получим

$$\left|\psi'(e^{i\theta_1}) - 2\psi'\left(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right) + \psi'(e^{i\theta_2})\right| =$$

$$= \left|\exp\{\log\psi'(e^{i\theta_1})\} - 2\exp\left\{\log\psi'\left(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right)\right\} + \exp\{\log\psi'(e^{i\theta_2})\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\exp\{\log\psi'(e^{i\theta_1})\} - 2\exp\left\{\frac{\log\psi'(e^{i\theta_1}) + \log\psi'(e^{i\theta_2})}{2}\right\} + \exp\{\log\psi'(e^{i\theta_2})\}\right| +$$

$$+ 2\left|\exp\left\{\frac{\log\psi'(e^{i\theta_1}) + \log\psi'(e^{i\theta_2})}{2}\right\} - \exp\left\{\log\psi'\left(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right)\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant A_{18}\,|\log\psi'(e^{i\theta_1}) - \log\psi'(e^{i\theta_2})|^2 +$$

$$+ A_{19}\left|\exp\left\{\frac{\log\psi'(e^{i\theta_1}) + \log\psi'(e^{i\theta_2})}{2} - \log\psi'\left(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right)\right\} - 1\right| \leqslant$$

$$\leqslant A_{18}\,|\log\psi'(e^{i\theta_1}) - \log\psi'(e^{i\theta_2})|^2 +$$

$$+ A_{20}\left|\log\psi'(e^{i\theta_1}) - 2\log\psi'\left(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right) + \log\psi'(e^{i\theta_2})\right| \leqslant$$

$$\leqslant A_{21}\left|\log\psi'(e^{i\theta_1}) - 2\log\psi'\left(e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right) + \log\psi'(e^{i\theta_2})\right| \leqslant A_{22}\,|\theta_2 - \theta_1|^{\alpha}, \tag{15}$$

т. е. $\omega_2(\psi', t) \leqslant A_{22}\cdot t^{\alpha}$.

Теорема полностью доказана.

Замечание. При условиях теоремы $\psi'(w) \neq 0$ в $\overline{D}$, а поэтому легко получаем, что на $C\,\omega_2(\varphi', t) \leqslant A_{23}\cdot t^{\alpha}$, где $\omega_2(\varphi', t) = \max\limits_{|s_1-s_2|\leqslant t}\left|\varphi'[z(s_1)] - 2\varphi'\left[z\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right)\right] + \varphi'[z(s_2)]\right|$.

Автор приносит искреннюю благодарность В. К. Дзядыку за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Я. Альпер, О равномерных приближениях функций комплексного переменного в замкнутой области, Изв. АН СССР, сер. матем., 19, 1955, 423—444.
2. Я. Л. Геронимус, О некоторых свойствах функций, непрерывных в замкнутом круге, ДАН СССР, новая серия, т. XCVIII, № 6, 1954.
3. Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, Гостехиздат, М., 1952.
4. А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, Физматгиз, М., 1960.
5. S. Warschawski, Über einen Satz von O. D. Kellog, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, B. 25, 1932.
6. O. D. Kellog, Harmonic funktions and Greens integral, Trans Amer. Math. Soc., vol. 13, 1912, 109—132.
7. Ou So-Mo, On some boundary properties of conformal mappings Sci. Sinica, 7, 1958, 131—136.

Поступила 7.IX 1964 г.
Киев