Об области значения максимального дифференциального оператора с постоянными коэффициентами в полупространстве

А. И. Марковский

Пусть Ω — область в $n+1$-мерном евклидовом пространстве

$$R^{n+1} = \{(t, x): -\infty < x < \infty, -\infty < t < \infty\}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n); \quad n \geqslant 0.$$

В дальнейшем $C_0^\infty(\Omega)$ обозначает линейное пространство всех бесконечно дифференцируемых финитных функций с носителями, расположенными внутри Ω, $C^\infty(\Omega)$ — линейное пространство всех бесконечно дифференцируемых функций в Ω.

Пусть

$$\mathfrak{P}(D) = \sum_{k=0}^{m} P_{m-k}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^k}{\partial t^k} = \sum_{k=0}^{m} P_{m-k}\left(i\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, i\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\frac{\partial^k}{\partial t^k}$$

— дифференциальный оператор с постоянными, вообще, комплексными, коэффициентами с областью определения $C^\infty(\Omega)$. Сопоставим, согласно Л. Хёрмандеру [1], оператору $\mathfrak{P}(D)$ в области Ω максимальный оператор $P(D)$ с областью определения $\mathfrak{D}_P$ следующим оброзом: функция $u \in \mathfrak{D}_P$ и $P(D)u = f$ в том и только в том случае, если $u, f \in L^2(\Omega)$ и для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ $(u, \mathfrak{P}'(D)\varphi) = (f, \varphi)$. Здесь скалярное произведение берется в $L^2(\Omega)$, $\mathfrak{P}'(D)$ — формально сопряженный оператор.

Л. Хёрмандер [1] показал, что если ширина области Ω по крайней мере в одном из $n+1$ направлений конечна, т. е. либо $\sup\limits_{(t,x),(\tau,y)\in\Omega} |t-\tau| < \infty$, либо $\sup\limits_{(t,x),(\tau,y)\in\Omega} |x_k - y_k| < \infty$ по крайней мере для одного k, $1 \leqslant k \leqslant n$, то область значений всякого максимального оператора $P(D)$ с постоянными коэффициентами совпадает с $L^2(\Omega)$.

В заметках [2, 3] рассматривались максимальные операторы с постоянными коэффициентами в случае, когда область Ω представляет собой полупространство $R_+ = \{(t, x): t > 0, -\infty < x < \infty\}$ пространства R^{n+1}. В предположении, чо коэффициент $P_0\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ удовлетворяет условию $|P_0(\sigma)| \geqslant \alpha > 0$ при всех вещественных $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, там было показано, что область значений всякого максимального оператора $P(D)$ плотна в $L^2(R_+)$. В случае полуоси ($n = 0$) область значений оператора $P(D)$ совпадает с $L^2(R_+)$ тогда и только тогда, когда ни один корень соответствующего характеристического многочлена $p(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{m} P_{m-k}\lambda^k$ не расположен на мнимой оси [2].

В случае $n \geqslant 1$ также сопоставим оператору $P(D)$ его характеристический многочлен $P(\sigma, \lambda) = \sum\limits_{k=0}^{m} P_{m-k}(\sigma)\lambda^k$; $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Пусть $\lambda_1(\sigma), \ldots, \lambda_m(\sigma)$ — его корни, возможно, кратные. Достаточными условиями совпадения области значения $\mathfrak{R}_P$ оператора $P(D)$ с пространством $L^2(R_+)$ являются условия

1°. $|\operatorname{Re}\lambda_j(\sigma)| \geqslant \beta_1 > 0$ при всех σ $(j = 1, \ldots, m)$;

2°. $|\lambda_j(\sigma) - \lambda_k(\sigma)| \geqslant \beta_2 > 0$ при всех σ, $i \neq k$, для тех i, k, для которых $\operatorname{Re}\lambda(\sigma) \geqslant \beta_1 > 0$.

Первое из этих условий аналогично условию для операторов на полуоси, и возникает вопрос, нельзя ли его ослабить, разрешив, например, веществнным частям корней $\lambda_j(\sigma)$ обращаться в 0 на множестве σ-меры 0 или стремиться к нулю при $|\sigma| \to \infty$.

Здесь будет показано, что условие 1° является существенным.

Рассмотрим два оператора:

1) $P_1(D) = \dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$,

2) $P_2(D) = \dfrac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial t} - 1$

с характеристическими многочленами $P_1(\sigma, \lambda) = \lambda + \sigma^2$; $P_2(\sigma, \lambda) = -\lambda(1 + \sigma^2) - 1$.

В первом случае $\lambda(\sigma) = \operatorname{Re}\lambda(\sigma) = -\sigma^2$ и $\operatorname{Re}\lambda(0) = 0$; во втором случае $\lambda(\sigma) = \operatorname{Re}\lambda(\sigma) = -\dfrac{1}{1+\sigma^2}$ и $\lim\limits_{|\sigma|\to\infty} \operatorname{Re}\lambda(\sigma) = 0$, так что в обоих случаях условие 1° нарушается. Покажем, что области значения обоих операторов не совпадают с $L^2(R_+)$. Для этого достаточно показать, что существует по крайней мере одна такая функция $f \in L^2(R_+)$, что уравнение $P(D)u = f$ неразрешимо в $L^2(R_+)$.

Рассмотрим, например, оператор $P_1(D)$ и возьмем

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x} \varphi(\sigma, t)\, d\sigma, \text{ где } \varphi(\sigma, t) = \frac{\sigma^3 t}{\sqrt{1+\sigma^2}\,(1+\sigma^2 t)^2}.$$

Непосредственно проверяется, что $\int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^\infty |\varphi(\sigma, t)|^2\, d\sigma dt < \infty$, а из теоремы Фубини и равенства Парсеваля отсюда следует, что $f(x, t) \in L^2(R_+)$.

Предположим, что уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t)$$

имеет обобщенное решение $u(x, t) \in L^2(R_+)$. Тогда, применяя преобразование Фурье по x, легко убедиться, что функция $\hat{u}(\sigma, t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x} u(x, t) dx$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d\hat{u}(\sigma, t)}{dt} + \sigma^2 \hat{u}(\sigma, t) = \frac{\sigma^3 t}{\sqrt{1+\sigma^2}\,(1+\sigma^2 t)^2}$$

при почти всех σ, причем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma \int_0^\infty |\hat{u}(\sigma, t)|^2\, dt < \infty. \tag{1}$$

Положим $\hat{u}(\sigma, 0) = \hat{u}_0(\sigma)$. Тогда $\hat{u}(\sigma, t)$ представляется в виде

$$\hat{u}(\sigma, t) = \hat{u}_0(\sigma)\, e^{-\sigma^2 t} + \frac{\sigma^3 e^{-\sigma^2 t}}{\sqrt{1+\sigma^2}} \int_0^t e^{\sigma^2 \tau} \frac{\tau d\tau}{(1+\sigma^2\tau)^2}$$

или, после вычисления интеграла и простых преобразований, —

$$\hat{u}(\sigma, t) = \left[\hat{u}_0(\sigma) - \frac{1}{\sigma\sqrt{1+\sigma^2}}\right] e^{-\sigma^2 t} + \frac{1}{\sigma\sqrt{1+\sigma^2}(1+\sigma^2 t)}.$$

Покажем сейчас, что никаким выбором начальной данной $\hat{u}_0(\sigma)$ нельзя добиться выполнения условия (1). В самом деле, допустим, что при некотором выборе $\hat{u}_0(\sigma)$ $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\sigma \int\limits_0^{\infty} |\hat{u}(\sigma, t)|^2 dt < \infty$. Тогда на основании теоремы Фубини функция $I(\sigma) = \int\limits_0^{\infty} |\hat{u}(\sigma, t)|^2 dt$ обязана быть суммируемой на всей σ-оси. Пусть $\hat{u}_0(\sigma) = \hat{w}_0(\sigma) + i\hat{v}_0(\sigma)$, где $\hat{w}_0(\sigma)$ и $\hat{v}_0(\sigma)$—вещественные функции. Имеем:

$$I(\sigma) = \frac{1}{2\sigma^2}\left[\hat{w}_0(\sigma) - \frac{1}{\sigma\sqrt{1+\sigma^2}}\right]^2 - \frac{2eEi(-1)}{\sigma^3\sqrt{1+\sigma^2}}\left[\hat{w}_0(\sigma) - \frac{1}{\sigma\sqrt{1+\sigma^2}}\right] +$$
$$+ \frac{1}{\sigma^4(1+\sigma^2)} + \frac{\hat{v}_0^2(\sigma)}{2\sigma^2} = K(\sigma) + \frac{\hat{v}_0^2(\sigma)}{2\sigma^2}.$$

Очевидно, что $K(\sigma) > 0$. Подходящим подбором $\hat{v}_0(\sigma)$ второе слагаемое всегда можно сделать суммируемым. Поэтому для суммируемости (несуммируемости) $I(\sigma)$ необходимо и достаточно, чтобы $K(\sigma)$ была суммируемой (несуммируемой). Предположим, что функция $\hat{w}_0(\sigma)$ уже фиксирована таким образом, что функция $K(\sigma)$ суммируема. Так как тогда $\hat{w}_0(\sigma)$ — вещественная функция, удовлетворяющая тождеству

$$\frac{1}{2\sigma^2}\left[\hat{w}_0(\sigma) - \frac{1}{\sigma\sqrt{1+\sigma^2}}\right]^2 - \frac{2eEi(-1)}{\sigma^3\sqrt{1+\sigma^2}}\left[\hat{w}_0(\sigma) - \frac{1}{\sigma\sqrt{1+\sigma^2}}\right] +$$
$$+ \frac{1}{\sigma^4(1+\sigma^2)} - K(\sigma) \equiv 0,$$

то, рассматривая это выражение как квадратный трехчлен относительно $\hat{w}_0(\sigma) - \frac{1}{\sigma\sqrt{1+\sigma^2}}$, видим, что его дискриминант должен быть неотрицательным, т. е.

$$\frac{e^2(Ei(-1))^2 - \frac{1}{2}}{\sigma^6(1+\sigma^2)} + \frac{K(\sigma)}{2\sigma^2} \geqslant 0.$$

Следовательно, будем иметь

$$K(\sigma) \geqslant \frac{2\left[\frac{1}{2} - e^2(Ei(-1))^2\right]}{\sigma^4(1+\sigma^2)}.$$

Но так как $-Ei(-1) < 0{,}22$, а $e < 2{,}72$ (см. [4]), то

$$2\left[\frac{1}{2} - e^2(Ei(-1))^2\right] > 0{,}28.$$

Поэтому

$$K(\sigma) > \frac{0{,}28}{\sigma^4(1+\sigma^2)}$$

и $K(\sigma)$ — несуммируемая функция в противоречии с предположением, а поэтому $I(\sigma)$ несуммируема.

Таким образом, уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x}\frac{\sigma^3 t d\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2(1+\sigma^2 t)^2 t}}$$

с правой частью из $L^2(R_+)$ не обладает ни одним обобщенным решением из $L^2(R_+)$, что и требовалось доказать.

Совершенно аналогично доказывается, что уравнение

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}-u=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x}\frac{(1+\sigma^2)^{1/8} t}{(1+\sigma^2+t)^2}\,d\sigma,$$

правая часть которого принадлежит $L^2(R_+)$, не имеет ни одного обобщенного решения из $L^2(R_+)$.

Поэтому условие 1° является существенным для совпадения области значения максимального оператора со всем $L^2(R_+)$.

В частности, для рассматриваемых максимальных операторов

$$P_1(D)=\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \text{ и } P_2(D)=\frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2}-\frac{\partial}{\partial t}-1$$

не существует ни одного решения, корректного в смысле М. И. Вишика — Л. Хёрмандера.

Что же касается условия 2°, то оно, по-видимому, не является существенным, хотя мы ничего не можем здесь доказать на этот счет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Хёрмандер. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных, ИЛ, М., 1959.
2. А. І. Марковський, Доп. АН УРСР, № 9, 1963.
3. А. І. Марковський, Доп. АН УРСР, № 9, 1964.
4. Е. Янке и Ф. Эмде, Таблицы функции, ИЛ, М., 1961.

Поступила 3.IV 1964 г.
Львов