О решении обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с помощью операторов численного интегрирования

А. В. Нестерчук

В работах [1 и 2] рассмотрены некоторые вопросы решения дифференциальных уравнений с помощью операторов численного интегрирования. В настоящей работе рассматриваются новые операторы численного интегрирования и их применение к решению обыкновенных линейных дифференциальных уравнений на электронно-счетных машинах. Рассмотрен также вопрос об оценке полной погрешности.

Пусть дана функция $f(x)$, непрерывная на сегменте $[0, 1]$. Разделим сегмент $[0, 1]$ на n равных частей, $h = \frac{1}{n}$. Введем обозначения:

$$x_0 = 0,\ x_i = ih,\ f_i = f(x_i),\ [f_i] = [f_0, f_1, \ldots, f_n], \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Будем вычислять $\int\limits_0^x f(t)\,dt$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, по одной из квадратурных формул, например по формуле трапеций. Тогда:

$$\int\limits_0^h f(t)\,dt \approx h \cdot \frac{1}{2}(f_0 + f_1) = h\,[f_0, f_1] \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\int\limits_0^{2h} f(t)\,dt \approx h \cdot \frac{1}{2}(f_0 + 2f_1 + f_2) = h\,[f_0, f_1, f_2] \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int\limits_0^{nh} f(t)\,dt \approx h \cdot \frac{1}{2}(f_0 + 2f_1 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n) = h\,[f_0, f_1, \ldots, f_n] \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

или в общем случае

$$\left[\int\limits_0^{ih} f(t)\,dt\right] \approx [f_k] \cdot h \cdot A_1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, i; \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n, \qquad (1)$$

где

$$A_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & . & . & . & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & . & . & . & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & . & 2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, матрица A_1 представляет разностный оператор, стоящий справа в формуле трапеций. В дальнейшем будем называть его оператором численного интегрирования. Обозначая $y_i = \int\limits_0^{ih} f(t)\,dt$, равенство (1) можно переписать в виде

$$[y_i] \approx h\,[f_k]\,A_1, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, i; \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Погрешность при этом можно найти, исходя из равенств:

$$y_1 = \frac{1}{2}h(f_0 + f_1) - \frac{1}{12}h^3 f''(\xi_1), \qquad 0 \leqslant \xi_1 \leqslant h,$$

$$y_2 = \frac{1}{2}h(f_0 + 2f_1 + f_2) - \frac{1}{12}h^3 f''(\xi_2), \qquad 0 \leqslant \xi_2 \leqslant 2h, \qquad (2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n = \frac{1}{2}h(f_0 + 2f_1 + \ldots + 2f_{n-1} + f_n) - \frac{1}{12}h^3 f''(\xi_n), \qquad 0 \leqslant \xi_n \leqslant nh.$$

Из (2) следует, что

$$|[y_i] - h[f_k]A_1| \leqslant R_1, \tag{3}$$

где

$$R_1 = \frac{Mh^3}{12}[0, 1, 1, \ldots, 1], \qquad M = \max_{0 \leqslant \xi \leqslant 1}|f''(\xi)|.$$

Одностроковую матрицу R_1 будем называть вектором погрешности. Выражение (3) характеризует погрешность метода. Полная погрешность представляет собой сумму погрешности метода и вычислительной погрешности. По поводу полной погрешности имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[0, 1]$, имеет на этом сегменте вторую производную, для которой выполнено условие*

$$|f''(\xi)| \leqslant M, \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant 1,$$

то при вычислении $\int\limits_0^x f(t)\,dt$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, с помощью оператора A_1, когда погрешности вычисленных значений функции $f^*(ih)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ не превышают величины $\frac{Mh^2}{12}$, вектор полных погрешностей R_1^* имеет вид

$$R_1^* = \frac{Mh^3}{12}[0, 2, 3, \ldots, n+1].$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ — точное, $f^*(x)$ — вычисленное значения функции. Вектор полных погрешностей для приближенного вектора $h[f_i^*]A_1$ определяется в виде разности

$$\left[\int\limits_0^{kh} f(t)\,dt\right] - h[f_k^*]A_1, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Вычисляем i-ю компоненту вектора (4). Учитывая (2), получим:

$$\frac{1}{2}h(f_0 + 2f_1 + \ldots + 2f_{i-1} + f_i) - \frac{1}{12}h^3 f''(\xi) - h[f_0^*, f_1^*, \ldots, f_i^*]\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\2\\1\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}h(f_0 + 2f_1 + \ldots + 2f_{i-1} + f_i) - \frac{1}{12}h^3 f''(\xi) - \frac{1}{2}h(f_0^* + 2f_1^* + \ldots$$

$$\ldots + 2f_{i-1}^* + f_i^*) = \frac{1}{2}h[(f_0 - f_0^*) + (2f_1 - 2f_1^*) + \ldots$$

$$\ldots + 2(f_{i-1} - f_{i-1}^*) + (f_i - f_i^*)] - \frac{1}{12}h^3 f''(\xi), \tag{5}$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots, n; \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant ih.$$

По условию теоремы $|f_i - f_i^*| \leqslant \frac{Mh^2}{12}$; тогда из (5)

$$\left|\left(\left[\int\limits_0^{kh} f(t)\,dt\right] - h[f_k^*]A_1\right)_i\right| \leqslant \frac{1}{2}h\cdot 2\cdot\frac{Mh^2}{12}i + \frac{1}{12}h^3 M =$$

$$= \frac{Mh^3}{12}(i+1), \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{6}$$

Учитывая очевидное равенство $\left|\left(\left[\int\limits_0^{kh} f(t)\,dt\right] - h\,[f_k]\,A_1\right)_0\right| = 0$ и (6), можем записать:

$$R_1^* = \frac{Mh^3}{12}[0, 2, 3, \ldots, n+1].$$

Более точным будет оператор, построенный при помощи парабол второй и третьей степени. При $x = h$ используем формулу трапеций; тогда

$$\int\limits_0^h f(t)\,dt \approx \frac{1}{12}h(f_0 + f_1). \tag{7}$$

При $x = 2h$ по формуле Симпсона

$$\int\limits_0^{2h} f(t)\,dt \approx \frac{1}{3}h(f_0 + 4f_1 + f_2), \tag{8}$$

при $x = 3h$ по формуле Симпсона «трех восьмых»

$$\int\limits_0^{3h} f(t)\,dt \approx \frac{3}{8}h(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3). \tag{9}$$

Если же $x = 4h$, то применяем дважды правило Симпсона «одной трети», а при $x = 5h$ — это же правило от 0 до $2h$ и от $2h$ до $5h$ — правило Симпсона «трех восьмых». В результате по аналогии с (1) получим:

$$\left[\int\limits_0^{ih} f(f)\,dt\right] \approx h\,[f_k]\,A_2, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, i; \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{10}$$

где

$$A_2 = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 0 & 12 & 8 & 9 & 8 & 8 & \ldots & 8 \\ 0 & 12 & 32 & 27 & 32 & 32 & \ldots & 32 \\ 0 & 0 & 8 & 27 & 16 & 17 & \ldots & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 32 & 27 & \ldots & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 27 & \ldots & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & \ldots & 32 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 8(9) \end{bmatrix}.$$

Последний диагональный элемент равен восьми, если n четно, и равен девяти при n нечетном. Погрешность при этом можно найти исходя из равенств:

$$y_1 = \frac{1}{2}h(f_0 + f_1) - \frac{1}{12}h^3 f''(\xi_1), \qquad 0 \leqslant \xi_1 \leqslant h,$$

$$y_2 = \frac{1}{3}h(f_0 + 4f_1 + f_2) - \frac{1}{90}h^5 f^{(\mathrm{IV})}(\xi_2), \qquad 0 \leqslant \xi_2 \leqslant 2h,$$

$$y_3 = \frac{3}{8} h (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) - \frac{3}{80} h^5 f^{(IV)}(\xi_3), \qquad 0 \leqslant \xi_3 \leqslant 3h,$$

$$y_4 = \frac{1}{3} h (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4) - \frac{1}{90} (f^{(IV)}(\xi_4') + f^{(IV)}(\xi_4'')), \tag{11}$$

$$0 \leqslant \xi_4' \leqslant 2h, \qquad 2h \leqslant \xi_4'' \leqslant 4h,$$

$$y_5 = \frac{1}{24} h (8f_0 + 32f_1 + 17f_2 + 27f_3 + 27f_4 + 9f_5) -$$

$$- \frac{h^5}{720} (3f^{(IV)}(\xi_5') + 27f^{(IV)}(\xi_5'')),$$

$$0 \leqslant \xi_5' \leqslant 2h, \qquad 2h \leqslant \xi_5'' \leqslant 5h,$$

. . . .

Таким образом, из (11) следует, что

$$| [y_i] - h [f_k] A_2 | \leqslant R_2, \tag{12}$$

где

$$R_2 = \frac{Mh^5}{720} [0, 1, 8, 27, 16, 35, 24, \ldots],$$

$$M = \max_{0 \leqslant \xi \leqslant 1} (| 60h^{-2} f''(\xi) |, \ | f^{(IV)}(\xi) |),$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, i; \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Относительно полной погрешности в процессе применения оператора A_2 выполняется теорема, аналогичная теореме 1.

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ задана и непрерывна на сегменте* $[0, 1]$, *имеет на этом сегменте производные до четвертого порядка включительно и выполняются условия* $| 60h^{-2} f''(\xi) | \leqslant M$, $| f^{(IV)}(\xi) | \leqslant M$, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$, *то при вычислении* $\int_0^x f(t)\, dt$ *с помощью оператора* A_2, *когда на каждом шаге h интегрирования погрешности вычисленных значений функции $f^*(x)$ не превышают величины* $\frac{Mh^4}{720}$, *вектор полных погрешностей* R_2^* *имеет вид*:

$$R_2^* = \frac{Mh^5}{720} [0, 2, 10, 30, 20, 40, 30, 50, \ldots].$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1, поэтому приводить его не будем.

При повторном интегрировании с помощью числовых операторов матрицы, представляющие эти операторы, перемножаются. Действительно, если вычисляется $\int_0^x dt \int_0^t f(\tau)\, d\tau$, то, обозначая $\int_0^t f(\tau)\, d\tau$ через $\Phi(t)$, получим по (1):

$$\left[\int_0^x \Phi(t)\, dt \right] \approx h [\Phi(t)] A_i = h^2 [f_k] A_i^2, \qquad i = 1, 2. \tag{13}$$

Легко видеть, что

$$\left[\underbrace{\int_0^x dt \int_0^t d\tau \ldots \int_0^v}_{m} f(u)\, du \right] \approx h^m [f_k] A_i^m, \qquad i = 1, 2. \tag{14}$$

Однако следует отметить, что не всегда целесообразно употреблять формулу (14), так как вычисления могут пройти успешнее, если предварительно левую часть формулы (14) заменить по формуле Коши:

$$\int_0^{kh} d\eta_1 \int_0^{\eta_1} d\eta_2 \int_0^{\eta_2} d\eta_3 \ldots \int_0^{\eta_{m-1}} f(\eta_m)\, d\eta_m = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^{kh} (kh-t)^{m-1} f(t)\, dt, \qquad (15)$$

а затем уже применить формулу (1).

Теперь рассмотрим решение обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами при помощи операторов численного интегрирования.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$ay' + by = f(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad (16)$$

a и b — постоянные, с начальным условием

$$y(0) = y_0. \qquad (17)$$

Интегрируя численно уравнение (16) с учетом (1) и (17), получаем:

$$a[y_k] - ay_0[1, 1, \ldots, 1] + bh[y_k] A_i = h[f_k] A_i$$

или

$$[y_k]\{aI + bhA_i\} = h[f_k] A_i + ay_0[1, 1, \ldots, 1], \qquad i = 1, 2, \qquad (18)$$

где I — единичная матрица. Матрица $aI + bhA_i$ обратима, так как она треугольная и ее диагональные элементы отличны от нуля и при $h \neq -\dfrac{a}{ba_{jj}}$ (a_{jj} — диагональные элементы матрицы A_i) $\det\{aI + bhA_i\} \neq 0$. Из (18) получаем:

$$[y_k] = \{h[f_k] A_i + ay_0[1, 1, \ldots, 1]\} B^{-1}, \qquad (19)$$

где $B = aI + bhA_i$, $(i = 1, 2)$ — матрица, которую будем называть «разрешающей». Равенство (19) представляет собой вычислительную формулу для нахождения решения задачи (16) — (17).

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение второго порядка

$$ay'' + by' + cy = f(x), \qquad x \in [0, 1], \qquad (20)$$

$$y(0) = y_0, \qquad y'(0) = y'_0,$$

a, b, c — постоянные.

Интегрируя первый раз, получим:

$$a(y' - y'_0) + b(y - y_0) + c\int_0^x y\,dt = \int_0^x f(t)\, dt, \qquad (21)$$

$$ay' + by + c\int_0^x y\,dt = \int_0^x f(t)\, dt + ay'_0 + by_0.$$

Теперь интегрируем (21) с учетом (13) и получаем:

$$ay + b\int_0^x y\,dt + c\int_0^x dt \int_0^t y\,d\tau = \int_0^x dt \int_0^t f(\tau)\, d\tau + \int_0^x (ay'_0 + by_0)\, dt + ay_0,$$

или

$$a[y_k] + bh[y_k] A_i + ch^2[y_k] A_i^2 = h^2[f_k] A_i^2 +$$

$$+ (ay_0' + by_0)[0, 1, 2, \ldots, n] + ay_0[1, 1, \ldots, 1], \qquad i = 1, 2;$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{22}$$

Для данного уравнения «разрешающей» матрицей назовем матрицу

$$B = aI + bhA_i + ch^2A_i^2, \qquad i = 1, 2.$$

Ввиду того что матрица A_i треугольная, для обратимости ее следует h выбрать так, чтобы

$$a + bha_{jj} + ch^2a_{jj}^2 \neq 0,$$

тогда $\det B \neq 0$ и формулу (22) можно записать в виде

$$[y_k] = \{h^2[f_k]A_i^2 + (ay_0' + by_0)[0, 1, 2, \ldots, n] + ay_0[1, 1, \ldots, 1]\} B^{-1}, \tag{23}$$

$$i = 1, 2; \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Формула (23) и будет вычисленной формулой для нахождения решения задачи (20). При интегрировании уравнения (21) можно также вместо (13) воспользоваться равенством (15). Тогда получим:

$$[y_k]\{aI + bhA_i + ch^2[k - j]_\alpha A_i\} =$$

$$= h^2[f_k][k - j]_d A_i^2 + (ay_0' + by_0)[0, 1, 2, \ldots, n] + ay_0[1, 1, \ldots, 1],$$

где $i = 1, 2$; $j = 0, 1, 2, \ldots, k$; $k = 0, 1, 2, \ldots, n$; $[k - j]_d$ — диагональная матрица.

Аналогично поступаем и при решении линейного дифференциального уравнения порядка m, применяя m-кратное интегрирование с использованием равенства (14) или с заменой по формуле (15).

Из (19) и (23) ясно, что процесс нахождения решения дифференциального уравнения сводится к арифметическим действиям с числовыми матрицами, что позволяет выгодно применять этот метод при решении дифференциальных уравнений указанного типа на электронно-счетных машинах, так как для умножения и обращения матриц применяются стандартные подпрограммы.

Существенное влияние на точность расчета оказывает здесь процесс обращения матрицы B. Его следует проводить по методу, указанному в [3], т. е. вводя исправление элементов матрицы B^{-1}.

Пример. Рассмотрим простейшее дифференциальное уравнение

$$y' + 2y = 8x^2 - 4x, \qquad x \in [0, 1] \tag{24}$$

с начальным условием $y(0) = 1$, имеющее очевидное решение $y = 4x^2 - 6x + 3 - 2e^{-2x}$. Для решения используем оператор A_2 при $h = 0{,}2$. Вычислительная формула для нахождения решения уравнения (24) имеет вид

$$[y_k] = \{0{,}2[f_k]A_2 + [1, 1, \ldots, 1]\} B^{-1},$$

где $f(x) = 8x^2 - 4x$, $\quad B = I + 0{,}4A_2$, $\quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Матрица решения, полученного аналитически, запишется так:

$$[y_k]_{\text{анал}} = [1;\ 0{,}6194;\ 0{,}3410;\ 0{,}2376;\ 0{,}3562;\ 0{,}8343];$$

полученного по предложенному методу —

$$[y_k]_{A_2} = [1;\ 0{,}6205;\ 0{,}3408;\ 0{,}2365;\ 0{,}3552;\ 0{,}8331],$$

а по методу Рунге — Кутта (вычислительная формула: $\Delta y_i \approx \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)$, $k_1 = hf(x_i, y_i)$, $k_2 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h,\ y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$, $k_3 = hf(x_i + h;\ y_i + 2k_2 - k_1)$) —

$$[y_k]_{RK} = [1;\ 0{,}6139;\ 0{,}3369;\ 0{,}2334;\ 0{,}3512;\ 0{,}7246].$$

Относительные погрешности в выбранных узлах соответственно равны: по предложенному методу:

$$\delta_1 = 0{,}16\%,\ \delta_2 = 0{,}07\%,\ \delta_3 = 0{,}46\%,\ \delta_4 = 0{,}28\%,\ \delta_5 = 0{,}14\%;$$

по методу Рунге — Кутта:

$$\eta_1 = 0{,}89\%,\ \eta_2 = 0{,}67\%,\ \eta_3 = 1{,}77\%,\ \eta_4 = 1{,}57\%,\ \eta_5 = 13{,}2\%.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. T. F. Bridgland, A note on numerikal integrationg operators, J. Soc. Industr. and Appl. Math., 6, № 3, 1958, 240—256.
2. A. Ronveaux, Intégration approchée des équations et des systemes d'équations d'opérateurs numeriques, Chiffres, № 2, 1962, 89—107.
3. Д. К. Фаддеев и В. Н. Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, М.—Л., 1963.
4. В. И. Крылов, Приближенное вычисление интегралов, Физматгиз, М., 1959.
5. П. С. Бондаренко, Дослідження обчислювальних алгоритмів наближеного інтегрування диференціальних рівнянь методом скінчених різниць, Вид-во КДУ, К., 1962.

Поступила 25.XII 1963 г.
Киев