Об аналитичности решения некоторого уравнения

В. Т. Поляцкий

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+q(x)y-\lambda y=0,\ 0\leqslant x\leqslant l, \tag{1}$$

относительно которого известно, что его нетривиальное решение представляется в виде

$$y(x,\lambda)=\omega(x,\lambda)+\int_0^x\omega(t,\lambda)K(x,t)\,dt, \tag{2}$$

где $K(x,t)$ имеет непрерывные частные производные до четвертого порядка включительно, а $\omega(x,\lambda)$ — решение уравнения: $\frac{d^4\omega}{dx^4}-\lambda\omega=0,\ \omega^{(k)}(0,\lambda)=d_k$ $(k=0,1,2,3)$.

В работе [1] Л. А. Сахнович доказал, что при наличии оператора преобразования (2) внутри квадрата $0\leqslant x\leqslant l$, $0\leqslant t\leqslant l$ существует функция $R(x,t)$, связанная определенным образом с ядром $K(x,t)$, непрерывная вместе с производными до второго порядка включительно, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2R}{\partial x^2}+\frac{\partial^2R}{\partial t^2}+\frac{p(x)+p(t)}{2}R(x,t)+\int_t^x R(x,s)R(s,t)\,dt=0 \tag{3}$$

и условию

$$\left.\frac{\partial R}{\partial x}\right|_{t=x}=\frac{1}{2}\left[q(x)-\frac{p''(x)}{2}-\frac{p^2(x)}{4}\right]. \tag{4}$$

Из теоремы Хопфа [3] вытекает, что функция $R(x,t)$ бесконечно дифференцируема. Принимая во внимание равенство (4), можно сделать заключение, что из бесконечной дифференцируемости функции $p(x)$ вытекает бесконечная дифференцируемость функции $q(x)$.

В настоящей статье мы доказываем следующую теорему: *Если функция $p(x)$ является аналитической при $0 < x < l$, то функция $q(x)$ также аналитическая в этом интервале.*

Пользуясь аналогичными рассуждениями, для доказательства сформулированной нами теоремы достаточно установить, что решение уравнения (3) является аналитической функцией внутри квадрата $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant l$, что является основным содержанием настоящей статьи. Это утверждение не вытекает из известных результатов, так как уравнение (3) содержит интегральное слагаемое.

2. Для доказательства аналитичности функции $R(x, t)$ воспользуемся методом последовательных приближений Пикара [2], предварительно преобразовав уравнение (3) из квадрата в единичный круг.

Пусть $x(u, v)$, $t(u, v)$ действительная и мнимая части функции $w(z)$, осуществляющей конформное отображение круга $|z| < 1$ на квадрат со стороной l.

При этом отображении уравнение (3) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 R\,[x\,(u, v), t\,(u, v)]}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 R\,[x\,(u, v), t\,(u, v)]}{\partial v^2} + \left\{\frac{p\,[x\,(u, v)] + p\,[t\,(u,v)]}{2} \times\right.$$

$$\left.\times R[x\,(u, v), t(u, v)] + \int\limits_{t(u,v)}^{x(u,v)} R\,[x\,(u, v),s]\,R\,[s, t\,(u,v)]ds\right\}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)^2\right] = 0.$$

Введем обозначение

$$R[x\,(u,v), t\,(u, v)] = \widetilde{R}\,(u, v).$$

Тогда

$$R\,(x, y) = \widetilde{R}\,[u\,(x,t), v\,(x,t)],$$

поэтому

$$R\,(x, s) = \widetilde{R}\,[u\,(x, s), v\,(x,s)] = \widetilde{R}[u\,(x\,(u, v),s), v\,(x\,(u,v),s)].$$

Аналогично

$$R\,(s,t) = \widetilde{R}\,[u\,(s, t\,(u, v)), v\,(s, t\,(u, v))].$$

Окончательно уравнение (3) будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{R}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial v^2} = -H_1^2\left\{\varphi(u, v)\widetilde{R}\,(u, v) + \int\limits_{t(u,v)}^{x(u,v)} \widetilde{R}\,[u\,(x\,(u,v), s), v\,(x\,(u,v), s)] \times\right.$$

$$\left.\times\,\widetilde{R}\,[u\,(s, t\,(u, v)), v\,(s, t\,(u, v))]\,ds\right. = f\,(u, v, \widetilde{R}), \tag{5}$$

$$\varphi\,(u, v) = \frac{p\,[x\,(u, v)] + p\,(t\,(u, v))}{2}\ , H_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)^2.$$

Учитывая равенство $f\,(0, 0, \widetilde{R}\,(0, 0)) = 0$, последовательные приближения имеют вид:

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial v^2} = 0 \qquad z_0\,|_C = \widetilde{R}$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z_1}{\partial v^2} = f\,(u, v, z_0) \qquad z_1\,|_C = \widetilde{R}$$

. . . .

$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z_n}{\partial v^2}=f(u, v, z_{n-1}) \qquad z_n\big|_C=\widetilde{R},$$

где C—окружность радиуса $R<1$ с центром в начале координат.

Функция z_0 является аналитической в круге K радиуса R, как решение уравнения Лапласа, поэтому в силу критерия Гарнака она имеет конечную тригонометрическую норму в круге K.

Обозначим тригонометрическую норму функции z_0 через N_0 и оценим норму функции $f(u, v, z_0)$.

Используя свойства норм, будем иметь:

$$[f(u, v, z_0)]_R=[H_1^2\Big\{\varphi(u, v) z_0+\int\limits_{t(u,v)}^{x(u,v)} z_0[u(x(u, v), s), v(x(u, v), s)]\times$$

$$\times z_0[u(s, t(u, v)), v(s, t(u, v))]ds\Big\}]_R \leqslant [H_1^2]_R\{[\varphi]_R\cdot[z_0]_R+[z_0]_R^2[x(u, v)-t(u, v)]_R\}. \tag{6}$$

Так как функции $H_1^2(u, v)$, $\varphi(u,v)$ и $x(u, v)-t(u, v)$ аналитичны в круге K, то числа $[H_1^2]_R$, $[\varphi]_R$, $[x(u, v)-t(u,v)]_R$ конечны.

Обозначим через L число

$$[H_1^2]_R\cdot\max\{[\varphi]_R, [x(u,v)-t(u,v)]_R\}.$$

Учитывая эти обозначения, неравенство (6) примет форму

$$[f(u, v, z_0)]_R\leqslant LN_0(1+N_0), \qquad N_0=[z_0]_R. \tag{7}$$

Аналогично можно получить неравенства:

$$[f(u, v, z_k)]_R\leqslant LN_k(1+N_k), \qquad N_k=[z_k]_R \qquad (k=1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Известно [2], что норма решения уравнения Пуассона в круге K

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=F(u, v)$$

удовлетворяет неравенству

$$[z]_R<\frac{R^2}{2}[F(u,v)]_R. \tag{9}$$

Из неравенства (9) и критерия Гарнака вытекает, что, если правая часть уравнения Пуассона является аналитической функцией, то решение его также является аналитической функцией.

Отсюда и из неравенства (8) следует, что последовательные приближения $z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$ являются аналитическими функциями.

Докажем, что последовательность функций $z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$ равномерно сходится к некоторой функции z в круге $R'<R$; для этого оценим тригонометрические нормы функций z_n. Используя неравенства (8) и (9), получим

$$N_0=[z_0]_R$$

$$N_1=[z_1]_R<\frac{R^2}{2}LN_0(1+N_0)$$

$$N_2=[z_2]_R<\frac{R^2}{2}LN_1(1+N_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$N_n = [z_n]_R < \frac{R^2}{2} L N_{n-1}(1 + N_{n-1})$$

. . . .

Нетрудно проверить, что при определенном выборе R, последовательность N_n является ограниченной.

В самом деле, если $N_0 < 1$, то, выбирая $R < \frac{1}{\sqrt{L}}$, получим:

$$N_1 < \frac{R^2 L}{2} \cdot 1 \cdot 2 \leqslant 1, N_2 < \frac{R^2 L}{2} \cdot 1 \cdot 2 \leqslant 1, \ldots$$

Если $N_0 > 1$, то положим $R \leqslant \sqrt{\frac{2}{LN_0(1 + N_0)}}$; тогда

$$N_1 < \frac{R^2 L}{2}(N_0 + 1) N_0 \leqslant \frac{2}{L(N_0 + 1) N_0} \cdot \frac{L}{2}(N_0 + 1) N_0 = 1 < N_0.$$

. . . .

$$N_n < \frac{R^2 L}{2}(N_{n-1} + 1) N_{n-1} < \frac{2}{LN_0(N_0 + 1)} \cdot \frac{L}{2}(N_0 + 1) N_0 = 1 < N_0$$

. . . .

Таким образом, существует число R' такое, что при всех $R \leqslant R'$ последовательность N_n удовлетворяет неравенству $N_n < 1$.

Введем обозначение $g_k = z_k - z_{k-1}$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\Delta g_1 = f(u, v, z_0) && g_1|_C = 0 \\
&\Delta g_2 = f(u, v, z_1) - f(u, v, z_0) && g_2|_C = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \qquad\qquad (10) \\
&\Delta g_n = f(u, v, z_{n-1}) + f(u, v, z_{n-2}) && g_n|_C = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &&
\end{aligned}$$

Оценим правые части этих уравнений

$$[f(u, v, z_{k-1}) - f(u, v, z_{k-2})]_R \leqslant [H_1^2]_R \{[\varphi]_R [g_{k-1}]_R + [g_{k-1}]_R N_{k-1} + \\ + [g_{k-1}] N_{k-2}\} \leqslant L [g_{k-1}]_R (1 + N_{k-1} + N_{k-2}).$$

Пользуясь неравенством (9), получим

$$[g_k]_R < \frac{R^2 L}{2} [g_{k-1}]_R (1 + N_{k-1} + N_{k-2}).$$

Учитывая, что $N_k < 1$ для всех $R < R'$ будем иметь

$$[g_k]_R < \frac{3R^2 L}{2} [g_{k-1}]_R. \qquad (11)$$

Из неравенства (11) вытекает неравенство:

$$|g_k| \leqslant [g_k]_R < \left(\frac{3R^2 L}{2}\right)^{k-1} [g_1]_R. \qquad (12)$$

Рассмотрим функциональный ряд

$$z_0 + g_1 + g_2 + \ldots + g_n + \ldots.$$

Так как для всех (u, v), принадлежащих кругу радиуса $R'' < \sqrt{\frac{2}{3L}}$,

этот ряд мажорируется сходящимся числовым рядом

$$N_0 + [g_1]_R + \frac{3R''^2 L}{2} [g_1]_R + \ldots + \left(\frac{3R''^2 L}{2}\right)^{h-1} [g_1]_R + \ldots,$$

то он сходится равномерно и, следовательно, его сумма z является аналитической функцией в круге радиуса R''.

Очевидно $z = \lim z_n$.

Покажем, что функция $z(u, v)$ является решением уравнения (5).

В самом деле, на основании теоремы Вейерштрасса ряды, составленные из частных производных первого и второго порядка, сходятся равномерно, причем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 z_0}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g_1}{\partial u^2} + \ldots + \frac{\partial^2 g_n}{\partial u^2} + \ldots$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 z_0}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 g_1}{\partial v^2} + \ldots + \frac{\partial^2 g_n}{\partial v^2} + \ldots$$

Поэтому, переходя в равенстве

$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z_n}{\partial v^2} = f(u, v, z_{n-1})$$

к пределу, получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = f(u, v, z).$$

Таким образом, аналитическая функция z является решением уравнения (5) и на окружности достаточно малого радиуса совпадает с функцией $\widetilde{R}(u, v)$.

Покажем, что $z(u, v) = \widetilde{R}(u, v)$.

В самом деле, так как функции z и $\widetilde{R}$ являются решениями уравнения (5), то вычитая из тождества

$$\Delta z = f(u, v, z) \qquad \text{тождество } \Delta\widetilde{R} = f(u, v, \widetilde{R}),$$

получим

$$\Delta\widetilde{\omega} = f(u, v, z) - f(u, v, \widetilde{R}), \tag{13}$$

где

$$\widetilde{\omega} = z - \widetilde{R}.$$

Очевидно, что $\widetilde{\omega}|_C = 0$. Требуется доказать, что $\widetilde{\omega} \equiv 0$.

Допустим, что $\widetilde{\omega} \neq 0$, тогда внутри круга существует точка $M_0(u_0, v_0)$ такая, что

$$|\widetilde{\omega}(M_0)| = \max|\widetilde{\omega}(M)| = N > 0.$$

Оценим разность $f(u, v, z) - f(u, v, \widetilde{R})$. Очевидно $|f(u, v, z) - f(u, v, \widetilde{R})| \leqslant$

$\leqslant MN$, где

$$M = \max H_1^2 \cdot \max \{|\varphi(u, v)|, |x(u, v) - t(u, v)|, |z(u, v)|\,|\widetilde{R}(u, v)|\}.$$

Известно [4], что решение уравнения Пуассона (13) представимо в виде

$$\widetilde{\omega}(M_0) = \iint\limits_K [f(u, v, z) - f(u, v, \widetilde{R})] G(M_1 M_0)\, du dv, \tag{14}$$

где $G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{\varrho_0 \cdot r_1}$ — функция Грина.

Учитывая неравенство $0 < G < \ln \frac{1}{r}$ доказываемое элементарно, получим:

$$N = |\widetilde{\omega}(M_0)| \leqslant MN \iint\limits_K \ln \frac{1}{r}\, du dv.$$

Можно доказать, что выражение $Q(R) = \iint\limits_K \ln \frac{1}{r}\, du dv$ при $R \to 0$ является бесконечно малым.

Поэтому из неравенства $N \leqslant MN\, Q(R)$ вытекает, что при достаточно малом R, $N = 0$, т. е.

$$z(u, v) \equiv \widetilde{R}(u, v).$$

Таким образом, мы доказали аналитичность функции $\widetilde{R}(u, v)$ внутри некоторого круга с центром в начале координат.

Выбирая соответствующим образом постоянные в формуле Кристоффеля — Шварца, центр круга в плоскости (u, v) можно перевести в любую точку диагонали квадрата $x = t$, поэтому функция $R(x, t)$, а вместе с ней функция $q(x)$ является аналитической.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Сахнович, Необходимые условия наличия оператора преобразования для уравнений четвертого порядка, УМН, т. 16, вып. 5, 1961.
2. С. Н. Бернштейн, Собр. соч., т. III, Изд-во АН СССР, М., 1960.
3. К. Миранда, Уравнения с частными производными эллиптического типа, ИЛ, М., 1957.
4. С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, Гостехиздат, М.—Л., 1950.

Поступила 17.IV 1963 г.
Одесса