Делимость в категории представлений над полным локальным дедекиндовым кольцом

А. В. Ройтер

В статье автора [1] было введено понятие категории с делимостью и сформулированы некоторые утверждения о свойствах делимости в категории целочисленных и p-адических представлений. В настоящей работе мы рассмотрим более подробно отношение делимости в категории представлений над полным локальным дедекиндовым кольцом.

1. Делимость в категории нетеровых модулей

Пусть A и B модули над произвольным кольцом $\Lambda \ni 1$. В соответствие с [1] будем говорить, что модуль A делит модуль B и писать A/B, если $A\,\mathrm{Hom}(A, B) = B$. Здесь $A\,\mathrm{Hom}(A, B) = \sum\limits_{\varphi \in \mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\varphi$. Отношение делимости, очевидно, рефлексивно и транзитивно, но не антисимметрично, т. е. может случиться, что A/B и B/A, при $A \neq B$ (например, при $A = B \oplus B$). Будем говорить, что модули A и B ассоциированы, если A/B и B/A. В настоящей статье кольцо Λ и все модули будем предполагать нетеровыми.

Предложение 1. *Для того чтобы A/B необходимо и достаточно, чтобы для некоторого n существовала точная последовательность $A^{(n)} \to B \to 0$, где $A^{(n)}$ — прямая сумма n экземпляров модуля A.*

Если B — фактор-модуль $A^{(n)}$, то $A^{(n)}/B$, а поскольку $A/A^{(n)}$ и отношение делимости транзитивно, то A/B.

Пусть A/B, т. е. $A\,\mathrm{Hom}(A,B) = B$. Используя нетеровость модуля B, мы можем выбрать в $\mathrm{Hom}(A, B)$ конечное число гомоморфизмов $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ так, чтобы $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\,\varphi_i = B$. Построим теперь $\varphi : A^{(n)} \to B$, считая, что φ на i-й компоненте действует как φ_i. Тогда очевидно получим точную последовательность $A^{(n)} \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow 0$. Утверждение доказано.

Свободный модуль S обладает следующими двумя свойствами:

1. S/X;
2. Всякая точная последовательность $X \to S \to 0$ расщепляема.

Здесь X в обоих случаях произвольный модуль.

Возникает вопрос, не являются ли эти свойства взаимно связанными, т. е. не выделяется ли фактор-модуль прямым слагаемым всякий раз, когда он делит модуль? Оказывается, в такой форме утверждение неверно. Однако оно становится верным при некоторых дополнительных предположениях.

Предложение 2. *Если A/B и кольцо $\mathrm{Hom}(A, A)$ коммутативно, то всякая точная последовательность $B \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0$ расщепляема.*

Обозначим $T = \mathrm{Hom}(A, B)\varphi$. T — идеал в $\mathrm{Hom}(A, A)$. Пусть $a_1, \ldots, a_m$ — образующие модуля A. Поскольку $A\,\mathrm{Hom}(A, B) = B$, $B\varphi = A$, то $AT = A$, т. е. существуют такие $t_{ij} \in T$, что $\sum\limits_{j=1}^{m} a_j t_{ij} = a_i \quad (i, j = 1, \ldots, m)$. Следовательно

$$\begin{vmatrix} t_{11} - 1, & t_{12}, & \ldots, & t_{1m} \\ t_{21}, & t_{22} - 1, & \ldots, & t_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{m1}, & t_{m2}, & \ldots, & t_{mm} - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, имеем $T \ni 1$, а значит найдется гомоморфизм $\psi : A \to B$ такой, что $\psi\varphi$ — тождественный гомоморфизм модуля A. Тогда $B = \mathrm{Ker}\,\varphi \oplus \mathrm{Im}\,\psi$.

Покажем, что в предложении 2 нельзя отбросить требование коммутативности кольца $\mathrm{Hom}(A, A)$. Для этого сформулируем в качестве леммы следующее почти очевидное утверждение, которым нам удобно будет пользоваться и в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть дана точная последовательность*

$$B \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0. \tag{1}$$

Пусть X произвольный модуль. Построим точную последовательность

$$B \oplus X \xrightarrow{\overline{\varphi}} A \oplus X \to 0, \tag{2}$$

где $(b, x)\overline{\varphi} = (b\varphi, x)$. *Тогда, если расщепляема одна из последовательностей* (1), (2), *то расщепляема и другая.*

Действительно, пусть расщепляема последовательность (1), т. е. существует $\psi \in \mathrm{Hom}\,(A, B)$ такой, что $\psi\varphi = 1 \in \mathrm{Hom}\,(A, A)$, тогда $\overline{\psi}\overline{\varphi} = 1 \in \mathrm{Hom}\,(A \oplus X, A \oplus X)$, где $(a, x)\overline{\psi} = (a\psi, x)$. Пусть расщепляема последовательность (2), т. е. существует $\overline{\psi}$ такой, что $\overline{\psi}\overline{\varphi} = 1 \in \mathrm{Hom}\,(A \oplus X, A \oplus X)$. Очевидно $a\overline{\psi} \in B$ и полагая $a\psi = a\overline{\psi}$, получим $\psi\varphi = 1 \in \mathrm{Hom}\,(A, A)$.

Пусть теперь у нас $B \to A \to 0$ — произвольная точная последовательность. Построим точную последовательность $B \oplus S \to A \oplus S \to 0$, где S — свободный модуль. Очевидно $A \oplus S / B \oplus S$. Поэтому, если бы предложение 1 было верно без предположения коммутативности $\mathrm{Hom}(A, A)$, то последовательность $B \oplus S \to A \oplus S \to 0$ должна была бы быть расщепляемой, а вместе с ней, по лемме 1, должна была бы быть расщепляемой точная последовательность $B \to A \to 0$, для произвольных A и B. Таким образом, просто отбросить требование коммутативности кольца $\mathrm{Hom}\,(A, A)$ нельзя. Вместе с тем это требование очень ограничительно. Мы постараемся сейчас заменить это требование некоторыми другими.

Разложение модуля A в прямую сумму $A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$ будем называть нормальным [1], если A_i/A_j при $i < j$. Модуль, который не может быть разложен в нормальную прямую сумму будем называть нормально неразложимым.

Напомним некоторые определения ([2] стр. 84—87). Кольцо U называется полупримарным, если фактор-кольцо U/R, где R радикал Джекобсона, удовлетворяет условию минимальности для правых идеалов. Кольцо U, имеющее радикал Джекобсона R, называется SBI-кольцом (подходящим для построения идемпотентных элементов) в том и только том случае, если

1) уравнение $x^2 - x = z$, где $z \in R$ имеет такое решение $z_1 \in R$, что
2) подкольцо элементов из U, коммутирующих с z, совпадает с подкольцом элементов, коммутирующих с z_1.

В [2] доказывается следующее предложение, оправдывающее это определение (стр. 85). Пусть U некоторое SBI-кольцо, имеющее радикал R, $\overline{U} = U/R$, $\overline{a} = a + R$, тогда, если $u \in U$, $\overline{u}$ идемпотент в $\overline{U}$, то существует такое $e \in U$, что $e^2 = e$ и $\overline{e} = \overline{u}$, причем из доказательства следует, что e содержится в левом идеале, порожденном u.

Лемма 2. *Пусть A' подмодуль модуля A, R — радикал кольца* $\mathrm{Hom}(A, A)$. *Если $A' + AR = A$, то $A' = A$.*

Лемма 2 непосредственно следует из леммы Накаяма (см., например, [3], стр. 5—6).

Теорема 1. *Для расщепления точной последовательности $B \xrightarrow{\varphi} A \to 0$ достаточно выполнения следующих трех условий:*

1) A/B;
2) *модуль A нормально неразложим*;
3) $\mathrm{Hom}(A, A)$ — *полупримарное SBI-кольцо.*

Обозначим $T = \mathrm{Hom}\,(A, B)\,\varphi$, $U = \mathrm{Hom}\,(A, A)$. T — левый идеал в U. Обозначим через R радикал U и $\overline{T} = T + R/R$. $\overline{U} = U/R$ — полупростое в классическом смысле кольцо. Поэтому левый идеал $\overline{T}$ кольца $\overline{U}$ порождается некоторым идемпотентом $\overline{u}$. Поскольку U SBI-кольцо, то найдется $e \in T$, $e^2 = e$, $\overline{e} = \overline{u}$. $A = Ae + AR = AeU + AR$ значит, по лемме 2, $AeU = A$. Но $A = \mathrm{Im}\, e \oplus \mathrm{Ker}\, e$, причем $AeU = A$, значит $\mathrm{Im}\, e/A$. Т. к. A, по условию, нормально неразложим, то $\mathrm{Im}\, e = A$ т. е. e — единица кольца $U =$

$= \mathrm{Hom}(A, A)$, но $e \in T$, значит $e = \psi\varphi$, где $\psi \in \mathrm{Hom}(A, B)$. Следовательно, получаем расщепление точной последовательности $B \xrightarrow{\varphi} A \to 0$.

Теорема доказана.

Подмодуль A' модуля A будем называть сверххарактеристическим, если $A' \mathrm{Hom}(A', A) = A'$ [1].

Сверххарактеристический подмодуль A' модуля A будем называть D-подмодулем, если он удовлетворяет следующим условиям:

1) $A' \neq A$;

2) A/A';

3) если B сверххарактеристический подмодуль модуля A и $A' + B = A$, то $B = A$.

Предложение 3. *Сумма двух D-подмодулей является D-подмодулем.*

Пусть A' и A'' два D-подмодуля модуля A. Покажем, прежде всего, что $A' + A''$ сверххарактеристический подмодуль. Для всякого $\varphi \in \mathrm{Hom}(A' + A'', A)$, $A'\varphi \subseteq A'$, $A''\varphi \subseteq A''$, а значит $(A' + A'')\varphi \subseteq A' + A''$. Проверим выполнение условий 1 — 3.

Если $A' + A'' = A$, то из условия 3) для A' следует $A'' = A$, что противоречит условию 1) для A''.

Поскольку A/A' и A/A'', то $A/A' + A''$.

Пусть $(A' + A'') + B = A$, где B — сверххарактеристический подмодуль. Поскольку $A'' + B$ в этом случае тоже сверххарактерической подмодуль модуля A, то из условия 3) для A' следует $A'' + B = A$, а значит $B = A$.

Предложение доказано.

Из нетеровости и из предложения 3 следует, что в каждом модуле A существует (единственный) D-подмодуль, содержащий все остальные D-подмодули. Обозначим этот D-подмодуль через $D(A)$.

2. Делимость, *D*-подмодули и полная приводимость в категории представлений над полным локальным дедекиндовым кольцом

Мы будем теперь придерживаться следующих обозначений. M — полное локальное дедекиндово кольцо с максимальным идеалом P, Γ — его поле отношений, Λ — содержащая единицу, конечномерная M-алгебра без M-кручения, K — категория конечнопорожденных Λ-модулей без M-кручения. Будем предполагать, что алгебра $\Lambda \underset{\mathrm{M}}{\otimes} \Gamma$ является полупростой алгеброй (в классическом смысле).

Важный для нас пример получим, полагая M — кольцо целых p-адических чисел, Γ — поле p-адических чисел, Λ — групповое кольцо некоторой конечной группы над кольцом целых p-адических чисел, K — категория целых p-адических представлений соответствующей группы.

Напомним, что, как показано в [4], в категории K имеет место теорема Крулля — Шмидта, т. е. разложение модуля на неразложимые однозначно.

Лемма 3. *Если $A \in K$, то $\mathrm{Hom}(A, A)$ есть полупримарное SBI-кольцо.*

Очевидно $U = \mathrm{Hom}(A, A)$ будет конечнопорожденным M-модулем. Очевидно далее, что радикал Джекобсона R кольца U содержит UP. Следовательно, U полупримарно. Для того, чтобы доказать, что U SBI-кольцо рассмотрим, следуя [2], решение уравнения $x^2 - x - z = 0$, где $z \in R$, $x = \frac{1}{2}(1 - (1 + 4z)^{1/2})$. Разложим x в ряд

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \binom{2n-1}{n} (-z)^n.$$

Все коэффициенты целые числа, $z \in R$, $\bar{z} \in \bar{R}$, где $\bar{R}$ — радикал кольца $\bar{U} = U/UP$, $\bar{z}$ — соответствующий z элемент кольца $\bar{U}$. Поскольку $\bar{U}$ кольцо с условием минимальности, то еге радикал Джекобсона нильпотентен, $\bar{z}^k = 0$, $z^k \in UP$. Поэтому записанный выше ряд сходится. Очевидно, что всякий элемент, коммутирующий с $z = x^2 - x$, коммутирует также с x, и наоборот. Следовательно, U SBI-кольцо.

Из теоремы 1 и леммы 3 непосредственно следует предложение 4.

Предложение 4. *Точная последовательность $B \to A \to 0$, где $A, B \in K$ расщепляема, если A/B и A нормально неразложим.*

Предложение 5. *В категории K в каждом классе ассоциированных модулей лежит один и только один нормально неразложимый модуль.*

Из нетеровости следует, что в каждом классе ассоциированных модулей найдется, по меньшей мере, один нормально неразложимый модуль. Предположим теперь, что A и B два ассоциированных нормально неразложимых модуля. Пусть $A = \oplus \sum_{i=1}^{k} A_i$, $B = \oplus \sum_{i=1}^{l} B_i$, где A_i, B_i неразложимы. Очевидно, что A_i не изоморфен A_j при $i \neq j$, так как иначе A был бы нормально разложим

$$A = (A_1 \oplus \ldots \oplus A_{i-1} \oplus A_{i+1} \oplus \ldots \oplus A_k) \oplus A_i.$$

Точно так же B_i не изоморфен B_j при $i \neq j$. Из предложения 1 следует, так как B/A, что существует эпиморфизм $\varphi : B^{(n)} \to A$. Согласно предложению 4, точная последовательность $B^{(n)} \xrightarrow{\varphi} A \to 0$ расщепляема, так как $A/B^{(n)}$ и A нормально неразложим. Значит $B^{(n)} = A \oplus X$. Учитывая однозначность разложения на неразложимые, мы получаем, что всякий A_i изоморфен некоторому B_j. Меняя местами A и B получим, что всякий B_i изоморфен некоторому A_j. Поскольку мы уже видели, что всякий A_i входит в разложение A по одному разу и всякий B_i входит в разложение B по одному разу, то модуль A изоморфен модулю B.

Модуль A будем называть вполне приводимым в K, если всякая точная последовательность $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$, где $A', A'' \in K$, расщепляема.

Теорема 2. *Модуль $A^{(n)}$ вполне приводим в K для любого n тогда и только тогда, когда $D(A) = 0$.*

Пусть $D(A) = 0$. Нужно показать, что всякая точная последовательность $0 \to A' \to A \xrightarrow{\varphi} A'' \to 0$, где $A', A'' \in K$, расщепляема. Заметим, прежде всего, что без ограничения общности мы можем считать модуль A'' неразложимым. Действительно, если $A'' = \oplus \sum_{i=1}^{k} A''_i$, то если точная последовательность $A \xrightarrow{\varphi_i} A''_i \to 0$, где φ_i i-я компонента гомоморфизма φ расщепляема при любом i, то расщепляема и исходная точная последовательность.

Итак, пусть A'' неразложим. Рассмотрим подмодуль $B = A'' \operatorname{Hom}(A'', A)$ модуля A. Из полупростоты алгебры $\Lambda \otimes_M \Gamma$ следует, что $B \neq 0$. Очевидно B сверххарактеристический подмодуль и удовлетворяет условию 2) из определения D-подмодуля.

Если $B = A$, то A''/A и из предложения 4 вытекало бы, что исходная точная последовательность расщепляема, что и требуется доказать.

Предположим, что $B \neq A$, т. е. B удовлетворяет условию 1) из определения D-подмодуля. Но поскольку $D(A) = 0$, а значит B не D-подмодуль, то B должен не удовлетворять условию 3), т. е. должен найтись такой сверххарактеристический подмодуль $C \neq A$ модуля A, что $B + C = A$.

Положим $M = C \oplus A''$. Пусть $M_1 \oplus M_2$ нормальное разложение модуля M, причем M_1 нормально неразложим. Пусть $C = \oplus \sum_{i=1}^{m} C_i$ разложение C на неразложимые, тогда $M = A'' \oplus C_1 \oplus \ldots \oplus C_m$ есть разложение M на неразложимые. Ввиду однозначности разложения модулей из K на неразложимые M_1 есть прямая сумма некоторых модулей из разложения M на неразложимые. Покажем, что в M_1 входит A_1''. Действительно, в противном случае $M_1 \oplus X = C$, но тогда было бы C/M_1, M_1/M, M/A, $C = C\mathrm{Hom}(C, A) = A$, что противоречило бы нашему предположению.

Итак, $M_1 = A'' \oplus C'$, $(A'' \oplus C')/(A'' \oplus C)$; $(A'' + C)\,\mathrm{Hom}(A'' + C, A) = B + C = A$, значит $A'' \oplus C/A$, $A'' \oplus C'/A^{(n)} \oplus C$, причем $A'' \oplus C$ — нормально неразложимый модуль.

Рассмотрим теперь точную последовательность $A^{(n)} \oplus C' \to A'' \oplus C' \to 0$. Согласно предложению 4 эта последовательность расщепляема, а значит, по лемме 1, расщепляема и исходная точная последовательность. Первая часть теоремы доказана.

Пусть модуль $A^{(n)}$ вполне приводим для всякого n. Нам надо показать, что $D(A) = 0$. Предположим противное. Пусть $A = A_1 \oplus A_2$ нормальное разложение, причем A_1 нормально неразложим. Поскольку A_1/A, $A/D(A)$, то, учитывая предложение 1, для некоторого n имеем точную последовательность $A_1^{(n)} \to D(A) \to 0$. Наряду с этой точной последовательностью рассмотрим точную последовательность $A_1^{(n)} \oplus A_2^{(n)} \to D \oplus A_2^{(n)} \to 0$. Поскольку $A_1^{(n)} \oplus A_2^{(n)} = A^{(n)}$ и $A^{(n)}$ вполне приводим, то последняя точная последовательность расщепляема, а значит, по лемме 1, расщепляема и последовательность $A_1^{(n)} \to D(A) \to 0$.

Разложим A_1 на неразложимые. Из однозначности разложения в K следует, что $D(A)$ есть прямая сумма некоторых неразложимых компонент A_1. Пусть $A_1 = A_1' \oplus A_1''$, где в A_1' входят те неразложимые компоненты, которые входят в разложение $D(A)$, а в A'' входят остальные компоненты A_1. Очевидно $D(A) \oplus A_1''/A_1$, A_1/A, значит $D(A) \oplus A_1''/A$, т. е.

$$D(A)\,\mathrm{Hom}(D(A), A) + A_1''\,\mathrm{Hom}(A_1'', A) = D(A) + A_1''\,\mathrm{Hom}(A_1'', A) = A.$$

Поскольку $A_1''\,\mathrm{Hom}(A_1'', A)$ сверххарактеристический подмодуль, то должно быть $A_1''\,\mathrm{Hom}(A_1'', A) = A$, т. е. A_1''/A. Но тогда A_1''/A_1, т. е. A_1 нормально разложим, что противоречит нашему предположению.

Теорема доказана.

Следствие. Для того чтобы Λ было наследственным кольцом необходимо и достаточно, чтобы $D(\Lambda) = 0$.

Автор выражает благодарность Д. К. Фаддееву за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Ройтер, Категории с делимостью и целочисленные представления, ДАН СССР, т. 153, 1963.
2. Н. Джекобсон, Строение колец, ИЛ, М., 1961.
3. Ж. П. Серр, Локальная алгебра и теория кратностей, Математика, 7 : 5, 1963.
4. З. И. Боревич и Д. К. Фаддеев, К теории гомологий конечных групп II, Вестн. Ленинград. ун-та, № 7, 1959.

Поступила 23.VI 1964 г.
Киев