A-гармонические поля с особенностями

И. В. Скрипник

В работе строятся A-гармонические поля второго и третьего рода. Изучается поведение A-гармонического поля в окрестности изолированной особой точки. Дается обобщение теоремы Римана — Роха.

Изложение ведется для операторов $\mathfrak{A}$ первого порядка. Однако при надлежащем видоизменении результаты пунктов 1—5 справедливы и для операторов $\mathfrak{A}$ высшего порядка.

Соответствующие результаты для гармонических полей получил Кодаира [1].

1. Пусть $\mathfrak{M}$ — действительное аналитическое ориентируемое риманово пространство размерности n (без границы), на котором заданы аналитические тензоры: a_i — ковариантный и a_i^j — смешанный. Рассматриваются операторы $\mathfrak{A}^p$ $(p=0,\ldots,n-1)$, переводящие формы степени p в формы степени $p+1$ и задаваемые формулой:

$$(\mathfrak{A}^p\alpha)_{k_1,\ldots,k_{p+1}}=\sum_{\nu=1}^{p+1}(-1)^{\nu-1}A_{k_\nu}\alpha_{k_1,\ldots,\hat{k}_\nu,\ldots,k_{p+1}},\quad A_i=a_i^j\nabla_j+a_i, \tag{1}$$

∇_j — символ ковариантной производной; индексы $k_1,\ldots,k_{p+1}$ при $\mathfrak{A}^p\alpha$ указывают, что речь идет о коэффициентах формы $\mathfrak{A}^p\alpha$ при $dx^{k_1}\wedge\ldots\wedge dx^{k_{p+1}}$ (анологично для α), а $k_1,\ldots,\hat{k}_\nu,\ldots,k_{p+1}$ получается из $k_1,\ldots,k_{p+1}$ вычеркиванием k_ν. Как обычно, предполагается суммирование по повторяющимся индексам. Определим еще $A^p=(\mathfrak{A}^p)'\mathfrak{A}^p+\mathfrak{A}^{p-1}(\mathfrak{A}^{p-1})'$, где $(\mathfrak{A}^p)'$ метрически сопряжен к $\mathfrak{A}^p$ (см. [3]).

В дальнейшем предполагается перестановочность A_j и эллиптичность A^0. Индексы при операторах $\mathfrak{A}^p$, $(\mathfrak{A}^p)'$, A^p будут часто опускаться.

2. Обозначим через $\mathfrak{A}^{*p}$ оператор, получаемый по формуле (1) путем замены A_i на $A_i^*=-\nabla_j\cdot a_i^j+a_i$.

Лемма 1. *На $\mathfrak{M}$ существует и притом единственная функция $\tilde{v}$, удовлетворяющая $\mathfrak{A}^{*0}\tilde{v}=0$.*

Пусть $\beta_n(u,\tilde{v})=u\cdot\tilde{v}$, здесь u — форма степени n.

Лемма 2. *Существуют формы $\beta_p(u,\tilde{v})$ степени p $(0\leqslant p\leqslant n-1)$, удовлетворяющие*

$$\beta_{p+1}(\mathfrak{A}^p u,\tilde{v})=d\beta_p(u,\tilde{v}) \tag{2}$$

и такие, что их коэффициенты являются билинейными формами относительно $\tilde{v}$ и коэффициентов u (u — форма степени p).

Меняя ролями операторы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^*$ получим формы $\beta_p^*(\tilde{v},v)$, обладающие аналогичными свойствами. $\tilde{u}$ — решение уравнения $\mathfrak{A}^0u=0$.

В дальнейшем будут употребляться обозначения:

$$\{u,C\}=\int_C\beta_p(u,\tilde{v}),\qquad [v,C]=\int_C\beta_p^*(\tilde{u},{*}v).$$

3. A-гармоническими полями будем называть формы, удовлетворяющие соотношениям $\mathfrak{A}u=0$, $\mathfrak{A}'u=0$.

Под выражением «A-гармоническое поле φ имеет особенность θ» понимается следующее. Пусть заданы нигде не плотное компактное подмножество F многообразия $\mathfrak{M}$, G—его окрестность, и A-гармоническое регулярное в $G-F$ поле Θ. Тогда φ имеет особенность Θ, если φ — регулярно в $\mathfrak{M}-F$, и существует A-гармоническое в G поле W такое, что $\varphi=\Theta+W$ в $G-F$.

Для простоты будем рассматривать случай, когда F содержится в достаточно малой геодезической сфере S (с границей Γ), $S\subset G$. Тогда возможность построения поля с заданной особенностью Θ дается следующей теоремой существования.

Теорема 1. *Пусть степень Θ равна p. Тогда в случае $2\leqslant p\leqslant n-2$ существует A-гармоническое поле φ с особенностью Θ. В случае $p=1$ или $p=n-1$ для этого достаточно соответственно:*

$$[\Theta, \Gamma]=0, \qquad \{\Theta, \Gamma\}=0. \tag{3}$$

Далее φ можно выбрать так, чтобы

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{M}-G}<+\infty, \tag{4}$$

$$\int\limits_{\mathfrak{M}}\varphi\wedge *\zeta\equiv(\varphi,\zeta)=0 \tag{5}$$

для произвольной формы ζ, равной нулю в G и удовлетворяющей $\mathfrak{A}\zeta=0$.

4. В этом пункте определяются A-гармонические поля второго и третьего рода. Используя построенное Я. Б. Лопатинским фундаментальное решение [2], устанавливается существование двойной формы $\omega(x,\xi)$, удовлетворяющей $A_x\omega(x,\xi)=0$ и такой, что для достаточно малой области $G\subset\mathfrak{M}$ и для произвольной достаточно гладкой формы η с носителем в G имеет место

$$\eta(\xi)=(\mathfrak{A}\eta, \mathfrak{A}\omega(\cdot,\xi))+(\mathfrak{A}'\eta, \mathfrak{A}'\omega(\cdot,\xi)).$$

Форма $\omega(x,\xi)$ определяется в окрестности диагонали произведения $\mathfrak{M}\times\mathfrak{M}$ и имеет порядок $O(r^{2-n})$ при $n>2$ и $O(\lg r)$ при $n=2$; r — геодезическое расстояние.

Пусть $C=C^p$ — цепь, содержащаяся в достаточно малой геодезической сфере S. Определим $u^{p-1}(x)=\{\omega(x,),\Delta C\}$. Можно выбрать в $G\supset S$ регулярное поле f так, чтобы поле $\Theta=f+\mathfrak{A}u^{p-1}$ было A-гармоническим. Применением теоремы 1 доказывается существование A-гармонического поля на $\mathfrak{M}$ с особенностью Θ. При помощи разбиения произвольной конечной цепи C на «малые» части устанавливается

Теорема 2. *Для каждой конечной цепи $C=C^p$ $(1\leqslant p\leqslant n-1)$ в $\mathfrak{M}$ существует одно и только одно поле $e[C]$ степени p, удовлетворяющее условиям (3), (4) и*

$$(e[C],\zeta)=\{\zeta, C\}, \qquad \mathfrak{A}\zeta=0 \tag{6}$$

$$(e[C],\mathfrak{A}'\varphi)=0, \tag{7}$$

$$\|e[C]\|_{1,G}<+\infty. \tag{8}$$

Поле $e[C]$ регулярное A-гармоническое в $\mathfrak{M}-\overline{\Delta C}$ и имеет особенность в каждой точке $\overline{\Delta C}$.

Пусть $\widetilde{e}[C]$ — аналогично получаемое поле для $\mathfrak{A}^*$. Определим $e^*[C]=$ $=*\widetilde{e}[C]$. Если $\Delta C\neq 0$, $e[C]$ и $e^*[C]$ будем называть A-гармоническими полями третьего рода.

Пусть $u(x,\xi)=\mathfrak{A}_\xi\omega(x,\xi)$.

Посредством предельного перехода из только что рассмотренного случая получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Для произвольного ξ и произвольных $k_1,\ldots,k_p$ существу-*

ет одно и только одно А-гармоническое поле $e_{k_1 \ldots k_p}(x, \xi)$, *регулярное в* $\mathfrak{M} - \xi$, *удовлетворяюще (3), (4) и такое, что в* $G - \xi$

$$e_{k_1,\ldots,k_p}(x, \xi) - (\mathfrak{A}u)_{k_1,\ldots,k_p}(x, \xi) = f_{k_1,\ldots,k_p}(x); \tag{9}$$

$f_{k_1 \ldots k_p}(x)$ — *голоморфное в некоторой окрестности* G *точки* ξ *поле.*

Пусть $\tilde{e}_{k_1,\ldots,k_p}(x, \xi)$ — аналогично получаемое для оператора $\mathfrak{A}^*$ поле.

Определяем $e^*_{k_1,\ldots,k_p}(x, \xi) = * \tilde{e}_{k_1,\ldots,k_p}(x, \xi)$.

Пару $P^r = (\sigma, \xi)$, состоящую из тензора $\sigma = \sigma^{\lambda_1,\ldots,\lambda_r; q_1,\ldots,q_{s-1}}$ и точки ξ в $\mathfrak{M}$ называем r-полюсом порядка s, причем σ предполагается кососимметрическим по греческим индексам.

Для произвольной формы φ степени r определяем

$$(\varphi, P^r) = \frac{1}{r!\,(s-1)!}\,\sigma^{\lambda_1,\ldots,\lambda_r; q_1,\ldots,q_{s-1}} \nabla_{q_1} \cdots \nabla_{q_{s-1}} \varphi_{\lambda_1,\ldots,\lambda_r}(\xi).$$

А-гармоническими полями второго рода называем $e[P](x) = (e(x, \cdot), P)$ и

$$e^*[P](x) = (e^*(x, \cdot), P).$$

5. В этом пункте изучается поведение A-гармонического поля в окрестности изолированной особой точки конечного порядка. Говорим, что регулярное при $x \neq x_0$ A-гармоническое поле $\varphi(x, x_0)$ имеет в точке x_0 особую точку конечного порядка, если $\varphi(x, x_0) = O(r(x, x_0)^{-n-l+1})$. Наименьшее целое неотрицательное l, для которого имеет место написанное соотношение, называем порядком особенности в точке x_0.

Теорема 4. *Пусть* $\Theta(x, x_0)$ *A-гармоническое поле степени* p *и* x_0 *его изолированная особая точка порядка* l. *В случае* $p = 1$ *или* $p = n - 1$ *соответственно предполагаем выполнение* (3) (*где под* Γ *надо понимать поверхность достаточно малой геодезической сферы с центром в* x_0). *Тогда в окрестности точки* x_0, Θ *представляется в виде*

$$\Theta = \sum_{m=1}^{l} e[P_m] + \Theta_0;$$

Θ — *регулярное A-гармоническое поле,* P_m — *p-полюс порядка* m.

Если $p = n - 1$ и (3) не выполнено, то поле

$$\Theta_1 = \Theta - (-1)^n \{\Theta, \Gamma\} e^*[C]$$

будет уже удовлетворять (3) и теорема 4 применима.

Здесь C — 1-цепь такая, что $\Delta C = x_0 - y_0$, y_0 — точка в окрестности x_0. Аналогично для $p = 1$.

6. Теорема 5. *Для произвольного конечного цикла* Z

$$\{e^*[C], Z\} = I(Z, C). \tag{10}$$

Здесь $I(Z, C)$ — индекс пересечения.

С помощью этой теоремы устанавливается следующая теорема, которую следует рассматривать как обобщение теоремы Римана — Роха. Предполагаем сейчас, что многообразие $\mathfrak{M}$ компактно.

Теорема 6. *Пусть на* $\mathfrak{M}$ *p-полюсы* $P_1, \ldots, P_r$, $Q_1, \ldots, Q_s$, *p-цепи* $C_1, \ldots, C_t$ *и* $n - p$*-цепи* $C_1^*, \ldots, C_u^*$ *заданы так, что* $e[Q_1], \ldots, e[Q_s]$, $e[P_1], \ldots, e[P_r]$, $e[C_1], \ldots, e[C_t]$, $e^*[C_1^*], \ldots, e^*[C_u^*]$ *линейно независимы по модулю* H^p (H^p — *пространство A-гармонических форм степени* p). *Числа* M, N, b *определяются следующим образом.* M — *число линейно независимых A-гармонических полей* e, *удовлетворяющих:* $e \equiv 0 \mod (H^p, e[P_1], \ldots, e[P_r])$, $\{e, Z^p\} = 0$ *для всех*

p-мерных циклов Z^p *пространства* $\mathfrak{M}$, $[e, Z^{n-p}] = 0$ для всех $n - p$-мерных циклов Z^{n-p} пространства $\mathfrak{M}$,
$\{e, C_k\} = 0$ $(k = 1, \ldots, t)$, $[e, C_i^*] = 0$ $(i = 1, \ldots, u)$, $[e, Q_j] = 0$ $(j = 1, \ldots, s)$;
N — *число линейно независимых A-гармонических полей* e', *удовлетворяющих*:

$$(e', P_j) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, r),$$

$$e' \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\,(H^p, e[Q_1], \ldots, e[Q_s], \quad e[C_1], \ldots, e[C_t], \quad e^*[C_1^*], \ldots, e^*[C_u^*]);$$

b — *p-мерное число Бетти многообразия* $\mathfrak{M}$.
Тогда

$$M = N - b + r - s - t - u.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Kodaira, Harmonic fields in Riemannian manifolds (generalized potentia, theory), Annals of Math., 50, 1949, 587—665.
2. Я. Б. Лопатинский, Функциональная система решений системы линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа, ДАН СССР, т. 71, № 3, 1950, 433—436.
3. Ж. де Рам, Дифференциальные многообразия, ИЛ, М., 1956.

Поступила 27.III 1964 г.
Львов