О решении линейных интегральных уравнений Вольтерра и уравнений смешанного типа в пространстве L^p при помощи одного варианта метода Ю. Д. Соколова

В. И. Тивончук

§ 1. Уравнение Вольтерра. Рассмотрим линейное неоднородное интегральное уравнение второго рода типа Вольтерра

$$y(x) = \varphi(x) + \int_a^x K(x, \xi)\, y(\xi)\, d\xi \qquad (a = \text{const}), \tag{1}$$

где заданные функции $\varphi(x)$ и $K(x, \xi)$ рассматриваются соответственно в областях: $a \leqslant x \leqslant a+h$ и $a \leqslant \xi \leqslant x \leqslant a+h$.

Для приближенного решения уравнения (1) Ю. Д. Соколов применил основной вариант своего метода осреднения функциональных поправок [1—3], который практически почти всегда приводит к более точному результату, чем классический метод простой итерации. Но существенным недостатком этого варианта является то обстоятельство, что построенный алгоритм не сходится, вообще говоря, на всем рассматриваемом промежутке $(a, a+h)$. Указаного недостатка лишен алгоритм, определяемый при помощи формул

$$y_n(x) = \varphi(x) + \int_a^x K(x, \xi)\,[y_{n-1}(\xi) + \alpha_n(x)]\, d\xi \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

$$\alpha_n(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x \delta_n(\xi)\, d\xi, \qquad \delta_n(x) = y_n(x) - y_{n-1}(x), \qquad y_0(x) \equiv 0. \tag{3}$$

В работе [4] показано, что в случае ограниченного или полярного ядра алгоритм (2)—(3) сходится к решению уравнения (1) равномерно на всем промежутке $(a, a+h)$.

В настоящей статье доказывается сходимость этого алгоритма в пространстве L^p ($p \geqslant 1$) и устанавливается оценка погрешности n-го приближения. При этом предполагается, что:

1) $\varphi(x) \in L^p(a, a+h)$, т. е.

$$\|\varphi\| = \left\{ \int_a^{a+h} |\varphi(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty; \tag{4}$$

2) функция $K(x, \xi)$ удовлетворяет условию

$$\left\{ \int_a^{a+h} \left[\int_a^x |K(x, \xi)|^q d\xi \right]^{\frac{p}{q}} dx \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right), \tag{5}$$

которое при $p = 1$ ($q = \infty$) заменяется условием

$$\int_a^{a+h} \operatorname{vrai}\max_{\xi} |K(x, \xi)| \, dx < \infty, \tag{5'}$$

3) функция $K_1(x)$, определяемая равенством

$$K_1(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x K(x, \xi) \, d\xi, \tag{6}$$

суммируема на промежутке $(a, a+h)$, т. е.

$$\int_a^{a+h} |K_1(x)| \, dx < \infty; \tag{7}$$

4) промежуток $(a, a+h)$ — конечный или бесконечный.

Из соотношений (2) — (3) следует, что

$$\delta_n(x) = \int_a^x H(x, \xi) \, \delta_{n-1}(\xi) \, d\xi + (x-a) K_1(x) \, \alpha_n(x) \qquad (n = 2, 3, \ldots), \tag{8}$$

$$\alpha_1(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x \Phi(x, \xi) \, \varphi(\xi) \, d\xi, \tag{9_1}$$

$$\alpha_n(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x \Phi(x, t) \, dt \int_a^t H(t, \xi) \, \delta_{n-1}(\xi) \, d\xi \qquad (n = 2, 3, \ldots), \tag{9_n}$$

где

$$\Phi(x, \xi) = \exp\left[\int_\xi^x K_1(\zeta) \, d\zeta \right], \qquad H(x, \xi) = K(x, \xi) - K_1(x). \tag{10}$$

Формулы (2), (9_1) и (9_n) рекуррентно определяют все последовательные приближения $y_n(x)$.

Подставляя (9_n) в (8), получим

$$\delta_n(x) = \int_a^x R(x, \xi) \, \delta_{n-1}(\xi) \, d\xi \qquad (n = 2, 3, \ldots), \tag{11}$$

где

$$R(x, \xi) = H(x, \xi) + K_1(x) \int_{\xi}^{x} \Phi(x, t) H(t, \xi)\, dt, \tag{12}$$

причем функция $R(x, \xi)$ удовлетворяет условию

$$\left\{ \int_a^{a+h} \left[\int_a^x | R(x, \xi) |^q d\xi \right]^{\frac{p}{q}} dx \right\}^{\frac{1}{p}} = R < \infty. \tag{13}$$

Теорема 1. *Если заданные функции $\varphi(x)$, $K(x, \xi)$ и $K_1(x)$ удовлетворяют условиям* (4), (5) *и* (7), *то последовательность функций $\{y_n(x)\}$, определяемая формулами* (2) — (3), *сходится в среднем с показателем p на* ***всем*** *рассматриваемом промежутке $(a, a+h)$ к решению $y(x) \in L^p(a, a+h)$ уравнения* (1) *и имеет место оценка погрешности*

$$\| y - y_n \| < \| y_1 \| \sum_{i=n}^{\infty} \frac{R^i}{\sqrt[p]{i!}} \qquad (n = 1,\ 2, \ldots). \tag{14}$$

Доказательство. Из условий теоремы прежде всего следует, что последовательные приближения $y_n(x)$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ принадлежат пространству $L^p(a,\ a + h)$, в чем легко убедиться методом полной математической индукции.

Далее, из уравнения (11), используя неравенство Гельдера, найдем

$$\int_a^x | \delta_n(t) |^p dt = \int_a^x \left| \int_a^t R(t, \xi)\, \delta_{n-1}(\xi)\, d\xi \right|^p dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^x \left[\int_a^t | R(t, \xi) |^q d\xi \right]^{\frac{p}{q}} dt \int_a^t | \delta_{n-1}(\xi) |^p d\xi = \int_a^x A(t)\, dt \int_a^t | \delta_{n-1}(\xi) |^p d\xi, \tag{15}$$

где

$$A(x) = \left[\int_a^x | R(x, \xi) |^q d\xi \right]^{\frac{p}{q}}. \tag{16}$$

Определим последовательность функций $\{F_n(x)\}$ при помощи рекуррентного соотношения

$$F_0(x) \equiv 1, \qquad F_n(x) = \int_a^x A(t)\, F_{n-1}(t)\, dt \qquad (n = 1,\ 2, \ldots). \tag{17}$$

Тогда из неравенства (15) при $n = 2$ получим

$$\int_a^x | \delta_2(t) |^p dt \leqslant \int_a^x A(t)\, dt \int_a^t | y_1(\xi) |^p d\xi < \| y_1 \|^p \int_a^x A(t) dt = \| y_1 \|^p F_1(x). \tag{18}$$

Теперь из того же неравенства (15) при $n = 3$, учитывая (17) и (18), найдем

$$\int_a^x | \delta_3(t) |^p dt \leqslant \int_a^x A(t)\, dt \int_a^t | \delta_2(\xi) |^p d\xi < \| y_1 \|^p \int_a^x A(t)\, F_1(t)\, dt = \| y_1 \|^p F_2(t). \tag{19}$$

Вообще, если

$$\int_a^x | \delta_n(t) |^p dt < \| y_1 \|^p F_{n-1}(x),$$

то аналогичным образом установим, что

$$\int_a^x |\delta_{n+1}(t)|^p dt \leqslant \int_a^x A(t)\,dt \int_a^t |\delta_n(\xi)|^p d\xi <$$

$$< \|y_1\|^p \int_a^x A(t)\,F_{n-1}(t)\,dt = \|y_1\|^p F_n(x) \qquad (n=1,\ 2,\ldots). \tag{20}$$

В силу легко проверяемого тождества

$$F_n(x) = \frac{1}{n!} F_1^n(x) \qquad (n=1,\ 2,\ldots) \tag{21}$$

неравенство (20) перепишется в виде

$$\int_a^x |\delta_{n+1}(t)|^p dt < \|y_1\|^p \frac{F_1^n(x)}{n!}, \tag{22}$$

откуда, согласно (13), (16) и (17) получим

$$\left\{\int_a^{a+h} |\delta_{n+1}(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} < \|y_1\| \frac{R^n}{\sqrt[p]{n!}} \qquad (n=1,\ 2,\ldots). \tag{23}$$

Следовательно, при $n\to\infty$ $\|y_{n+1}-y_n\|\to 0$, т. е. последовательность функций $\{y_n(x)\}$ сходится в себе. А в силу полноты пространства L^p эта последовательность сходится в среднем с показателем p на всем рассматриваемом промежутке $(a, a+h)$ к функции $y(x)\in L^p(a, a+h)$, которая, как легко убедиться, удовлетворяет уравнению (1).

Применяя к равенству

$$y(x) - y_n(x) = \sum_{i=n}^{\infty} \delta_{i+1}(x) \tag{24}$$

обобщенное неравенство Минковского и учитывая соотношение (23), получим необходимую оценку погрешности (14).

Более грубая, но вместе с тем более простая оценка погрешности имеет вид

$$\|y-y_n\| < \|y_1\| \frac{R^n}{\sqrt[p]{n!}}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{R}{\sqrt[p]{n+1}}}; \tag{25}$$

при этом n должно удовлетворять неравенству $\sqrt[p]{n+1} > R$.

2. Уравнение смешанного типа. Рассмотрим линейное неоднородное интегральное уравнение второго рода смешанного типа

$$u(x,t) = \varphi(x,t) + \int_{t_0}^{t}\int_a^b K(x,t;\xi,\tau)\,u(\xi,\tau)\,d\xi d\tau \qquad (b-a=h>0). \tag{26}$$

где заданные функции $\varphi(x,t)$ и $K(x,t;\xi,\tau)$ рассматриваются соответственно в областях: $D_0(a\leqslant x\leqslant b,\ t_0\leqslant t\leqslant t_0+T_0)$ и $D(a\leqslant x, \xi\leqslant b;\ t_0\leqslant\tau\leqslant\leqslant t\leqslant t_0+T_0)$.

Для решения уравнения (25) используем алгоритм [5], определяемый при помощи формул

$$u_n(x,t) = \varphi(x,t) + \int_{t_0}^{t}\int_a^b K(x,t;\xi,\tau)\,[u_{n-1}(\xi,\tau)+\alpha_n(t)]\,d\xi d\tau \tag{27}$$
$$(n=1,\ 2,\ldots),$$

$$\alpha_n(t)=\frac{1}{h(t-t_0)}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{a}^{b}\delta_n(x,\tau)\,dxd\tau,\qquad \delta_n=u_n-u_{n-1},\qquad u_0\equiv 0. \quad (28)$$

Как и в § 1, будем предполагать, что:

1) $\varphi(x,t)\in L^p_{D_0}$, т. е.

$$\|\varphi\|=\left\{\iint\limits_{D_0}|\varphi(x,t)|^p dxdt\right\}^{\frac{1}{p}}<\infty; \quad (29)$$

2) функция $K(x,t;\xi,\tau)$ удовлетворяет условию

$$\left\{\int\limits_{t_0}^{t_0+T_0}\int\limits_{a}^{b}\left[\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{a}^{b}|K(x,t;\xi,\tau)|^q d\xi d\tau\right]^{\frac{p}{q}}dxdt\right\}^{\frac{1}{p}}<\infty \qquad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right), \quad (30)$$

которое при $p=1$ $(q=\infty)$ заменяется условием

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+T_0}\int\limits_{a}^{b}\operatorname{vrai}\max_{\xi,\tau}|K(x,t;\xi,\tau)|\,dxdt<\infty; \quad (30')$$

3) функция

$$K_1(x,t)=\frac{1}{h(t-t_0)}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{a}^{b}K(x,t;\xi,\tau)\,d\xi d\tau \quad (31)$$

суммируема в области D_0, т. е.

$$\iint\limits_{D_0}|K_1(x,t)|\,dxdt<\infty; \quad (32)$$

4) промежуток (t_0,t_0+T_0) конечный или бесконечный.

Из (27) и (28) следует [6], что

$$\delta_n(x,t)=\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{a}^{b}H(x,t;\xi,\tau)\,\delta_{n-1}(\xi,\tau)\,d\xi d\tau+h(t-t_0)K_1(x,t)\,\alpha_n(t)\quad (n=2,3,\ldots), \quad (33)$$

$$\alpha_1(t)=\frac{1}{h(t-t_0)}\int\limits_{t_0}^{t}\widetilde{\Phi}(t,\eta)\,d\eta\int\limits_{a}^{b}\varphi(x,\eta)\,dx, \quad (34_1)$$

$$\alpha_n(t)=\frac{1}{h(t-t_0)}\int\limits_{t_0}^{t}\widetilde{\Phi}(t,\eta)\,d\eta\int\limits_{a}^{b}\int\limits_{t_0}^{\eta}\int\limits_{a}^{b}H(x,\eta;\xi,\tau)\,\delta_{n-1}(\xi,\tau)\,d\xi d\tau dx \quad (34_n)$$

$$(n=2,\ 3,\ldots),$$

где

$$\widetilde{\Phi}(t,\eta)=\exp\left[\int\limits_{\eta}^{t}\int\limits_{a}^{b}K_1(x,\tau)\,dxd\tau\right],\quad H(x,t;\xi,\tau)=K(x,t;\xi,\tau)-K_1(x,t). \quad (35)$$

Подставляя (34) в (33), получим

$$\delta_n(x,t)=\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{a}^{b}R(x,t;\xi,\tau)\,\delta_{n-1}(\xi,\tau)\,d\xi d\tau\qquad (n=2,3,\ldots), \quad (36)$$

где функция

$$R(x,t;\xi,\tau)=H(x,t;\xi,\tau)+K_1(x,t)\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{a}^{b}\widetilde{\Phi}(t,\eta)H(x,\eta;\xi,\tau)dxd\eta \tag{37}$$

удовлетворяет условию

$$\left\{\int\limits_{t_0}^{t_0+T_0}\int\limits_{a}^{b}\left[\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{a}^{b}|R(x,t;\xi,\tau)|^q d\xi d\tau\right]^{\frac{p}{q}}dxdt\right\}^{\frac{1}{p}}=\widetilde{R}<\infty. \tag{38}$$

Теорема 2. *Если заданные функции* $\varphi(x,t)$, $K(x,t;\xi,\tau)$ *и* $K_1(x,t)$ *удовлетворяют условиям* (29), (30) *и* (32), *то последовательность функций* $\{u_n(x,t)\}$, *определяемая формулами* (27), (28), *сходится в среднем с показателем* p *во* ***всей*** *рассматриваемой области* D_0 *к решению* $u(x,t)\in L^p_{D_0}$ *уравнения* (26) *и имеет место оценка погрешности*

$$\|u-u_n\|<\|u_1\|\sum_{i=n}^{\infty}\frac{\widetilde{R}^i}{\sqrt[p]{i!}}\qquad (n=1,\ 2,\ldots). \tag{39}$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Заменяя в (25) y на u и R на $\widetilde{R}$, получим более простую оценку погрешности, чем оценка (39).

Примечание. Изложенный в этом параграфе алгоритм распространяется, очевидно, и на уравнения вида

$$u(P,t)=\varphi(P,t)+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{G}K(P,t;Q,\tau)u(Q,\tau)d\omega_Q d\tau, \tag{40}$$

где P, Q — точки некоторой данной ограниченной области G любого числа измерений или некоторой поверхности или кривой, а $d\omega_Q$ — элемент объема (площади или длины дуги) с заменой интегрирования по отрезку $[a,\ b]$ интегрированием по области G (поверхности или кривой) и h — на объем области G (площадь поверхности или длину дуги линии).

§ 3. Пример. В качестве примера рассмотрим уравнение

$$y(x)=1+\left(4+x+\frac{3\sqrt{3}}{\pi}x^{4/3}\right)x^{1/3}-\frac{4\sqrt{3}}{\pi}x^{4/3}\int\limits_0^x\frac{\sqrt[3]{x}\,y(\xi)}{\sqrt[3]{\xi}\sqrt[3]{x^2-\xi^2}}d\xi, \tag{41}$$

имеющее своим решением функцию $y(x)=1+x^{4/3}$.

Для $p>\frac{3}{2}$ условия (4), (5) и (7) имеют место на любом отрезке $[0,\ h]$, и мы вправе применить алгоритм, изложенный в § 1. Согласно этому алгоритму в первом приближении имеем

$$y_1(x)=1+\left(4+x+\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\right)x^{1/3}-4x^{1/3}\alpha_1(x), \tag{42}$$

где

$$\alpha_1(x)=\frac{1}{x}\int\limits_0^x y_1(\xi)\,d\xi. \tag{43}$$

Дифференцируя (43) и подставляя вместо $y_1(x)$ его значение из (42), получим уравнение

$$x\alpha_1'+(1+4x^{1/3})\alpha_1=1+\left(4+x+\frac{3\sqrt{3}}{\pi}x^{4/3}\right)x^{1/3},$$

откуда

$$\alpha_1(x) = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} x^{4/3} + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{7\sqrt{3}}{4\pi}\right)\left[x - \frac{1}{2}x^{2/3} + \frac{5}{24}x^{1/3} - \frac{5}{72} + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{288x^{1/3}} - \frac{5}{12^3x^{2/3}} + \frac{5}{12^4x}\left(1 - e^{-12\sqrt[3]{x}}\right)\right]. \qquad (44)$$

Подставляя (44) в (42), получим окончательное выражение для $y_1(x)$:

$$y_1(x) = 1 + \frac{7\sqrt{3}}{4\pi} x^{4/3} - \left(1 - \frac{7\sqrt{3}}{4\pi}\right)\left[-\frac{1}{2}x + \frac{5}{24}x^{2/3} - \frac{5}{72}x^{1/3} + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{288} - \frac{5}{12^3x^{1/3}} + \frac{5}{12^4x^{2/3}}\left(1 - e^{-12\sqrt[3]{x}}\right)\right]. \qquad (45)$$

Если же к уравнению (41) применить основной вариант [2] метода Ю. Д. Соколова и метод простой итерации, в первом приближении получим соответственно

$$\overline{y}_1(x) = 1 + x^{4/3} + \frac{(48 + 81x^{1/3})\sqrt{3} - 24\pi}{16\pi(1 + 3x^{1/3})} x^{5/3}, \qquad (46)$$

$$\overline{\overline{y}}_1(x) = 1 + x^{4/3} - \frac{48\sqrt{3}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} x^{2/3} - \frac{18\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{5\pi^2\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} x^2. \qquad (47)$$

Произведя вычисления по формулам (45) и (46), получим результаты, помещенные в таблице (знак «—» указывает на приближение с недостатком, а знак «+» — на приближение с избытком).

x		0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
y		1,116961	1,294722	1,506060	1,742654	2,000000	2,275190
Погрешности в %	y_1	−0,196	−0,469	−0,729	−0,958	−1,15	−1,29
	$\overline{y}_1$	+3,97	+11,5	+20,1	+28,7	+36,8	+44,4

Из этой таблицы видно, что $y_1(x)$ лучше представляет $y(x)$, чем $\overline{y}_1(x)$. Что же касается выражения (47), то оно не дает более или менее приемлемых результатов: относительные погрешности для $\overline{\overline{y}}_1(x)$ в рассматриваемых точках составляют сотни процентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Д. Соколов, О методе осреднения функциональных поправок, УМЖ, т. IX, № 1, 1957.
2. Ю. Д. Соколов, О приближенном решении линейных интегральных уравнений типа Вольтерра, УМЖ, т. X, № 2, 1958.
3. Ю. Д. Соколов, О применении метода осреднения функциональных поправок к линейным относительно производных дифференциальным уравнениям параболического типа, УМЖ, т. XII, № 2, 1960.
4. В. И. Тивончук, О решении линейных интегральных уравнений типа Вольтерра при помощи одного варианта метода Ю. Д. Соколова, УМЖ, т. XVII, № 1, 1965.
5. В. І. Тивончук, Про застосування методу Ю. Д. Соколова до розв'язування лінійних інтегральних рівнянь змішаного типу, Доп. АН УРСР, № 8, 1964.
6. В. І. Тивончук, Про розв'язування лінійних інтегральних рівнянь змішаного типу за допомогою одного варіанта методу Ю. Д. Соколова, Доп. АН УРСР, № 12, 1964.

Поступила 1.VII 1964 г.

Киев