О продолжении положительно определенных функций двух переменных

Ю. М. Березанский, М. Л. Горбачук

1. Пусть $G=(-2l, 2l)\times(-\infty, \infty)$, $0<l<\infty$. Непрерывная функция $f(t, x)$, $(t, x)\in G$, называется положительно определенной (п. о.), если

$$\sum_{j,k=1}^{n} f(t_j-t_k, x_j-x_k)\xi_j\bar{\xi}_k \geqslant 0 \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

для произвольных $t_j\in(-l, l)$, $x_j\in(-\infty, \infty)$ и комплексных чисел ξ_j ($j=1, \ldots, n$). В [8] показано, что всякая п. о. функция $f(t, x)$, заданная в полосе G, допускает п. о. продолжение на всю плоскость, которое, вообще говоря, может быть неединственным (см. также [4, 9, 1]). В случае неединственности представляет интерес описание таких продолжений. В этой заметке показывается, что описание всех п. о. продолжений п. о. функции двух переменных с полосы на плоскость можно свести к описанию п. о. продолжений некоторой операторной функции одной переменной в гильбертовом пространстве с конечного интервала на всю числовую ось. В случае «максимальных» дефектных чисел описание всех продолжений п. о. операторных функций получено в [3] (оно аналогично скалярному случаю; см. [5]). Учитывая это обстоятельство, мы получаем описание всех продолжений п. о. функции двух переменных при условии «максимальности» дефектных чисел; идея такого описания содержится в [1]. Другое описание всех продолжений в общем случае было дано в [7].

2. Обозначим $C_0^\infty(-\infty, \infty)$ совокупность всех финитных бесконечно дифференцируемых в $(-\infty, \infty)$ функций и введем на $C_0^\infty(-\infty, \infty)$ билинейную форму

$$(\varphi, \psi)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(0, x-y)\varphi(x)\overline{\psi(y)}\,dx\,dy \tag{1}$$

$$(\varphi, \psi\in C_0^\infty(-\infty, \infty)).$$

Без ограничения общности можно считать, что из $(\varphi, \varphi)=0$, $\varphi(x)\in C_0^\infty(-\infty, \infty)$, следует, что $\varphi(x)\equiv 0$. Благодаря п. о. $f(0, x)$ $(-\infty<x<\infty)$ форма (1) задает в $C_0^\infty(-\infty, \infty)$ скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$. Пополнение $C_0^\infty(-\infty, \infty)$ по этому скалярному произведению является гильбертовым пространством, которое обозначим $\mathfrak{H}$.

Заметим, что если форма (1) такова, что существуют $\varphi(x)\not\equiv 0$ из $C_0^\infty(-\infty, \infty)$, для которых $(\varphi, \varphi)=0$, то, отождествляя с нулем все такие φ, а затем пополняя, получим снова некоторое гильбертово пространство, в котором можно проводить все последующие рассуждения, как и в $\mathfrak{H}$.

Нетрудно проверить, что пространство $\mathfrak{H}$ содержит элементы δ_x ($x \in \in (-\infty, \infty)$) (дельта-функции, сосредоточенные в точке x), непрерывно зависящие от x как от параметра, причем $(\delta_x, \delta_y) = f(0, x-y)$. Рассмотрим билинейную форму

$$(\varphi, \psi)_t = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t, x-y)\,\varphi(x)\,\overline{\psi(y)}\,dxdy \tag{2}$$

$$(t \in (-2l, 2l),\ \varphi \in C_0^\infty(-\infty, \infty)).$$

П. о. функции $k_\varphi(t) = (\varphi, \varphi)_t$ ($t \in (-2l, 2l)$, $\varphi \in C_0^\infty(-\infty, \infty)$) влечет $|(\varphi, \psi)_t| \leqslant \leqslant \|\varphi\|\,\|\psi\|$ ($\|\cdot\|$ — норма элемента в $\mathfrak{H}$). Поэтому форма (2) ограничена для произвольного $t \in (-2l, 2l)$ и допускает представление

$$(\varphi, \psi)_t = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t, x-y)\,\varphi(x)\,\overline{\psi(y)}\,dxdy = (F(t)\varphi, \psi), \tag{3}$$

где $F(t)$ ($t \in (-2l, 2l)$) — некоторая операторная функция в $\mathfrak{H}$, $F(0) = E$ (E — единичный оператор в пространстве $\mathfrak{H}$). Так как $f(t, x)$, $(t, x) \in G$, непрерывна и п. о., то операторная функция $F(t)$ ($t \in (-2l, 2l)$) слабо непрерывна и п. о. Нетрудно видеть, что

$$f(t, x) = (F(t)\,\delta_x, \delta_0). \tag{4}$$

Таким образом, с помощью соотношений (3) и (4) каждой п. о. функции двух переменных $f(t, x)$, заданной в полосе $|t| \leqslant 2l$, $|x| < \infty$, сопоставляется некоторая операторная п. о. функция одной переменной $F(t)$, $|t| \leqslant 2l$.

3. Как показано в [6, 2], п. о. операторная функция $F(t)$ ($t \in (-2l, 2l)$), $F(0) = E$, допускает представление вида

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,d\tau(\lambda), \tag{5}$$

где $d\tau(\lambda)$ ($-\infty < \lambda < \infty$) — вообще говоря, обобщенное разложение единицы в $\mathfrak{H}$. Так как интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,d\tau(\lambda)$ задает п. о. операторную функцию на всей оси, которая совпадает с $F(t)$ на $(-2l, 2l)$, то $F(t)$ ($t \in (-2l, 2l)$) продолжается до п. о. функции на всей числовой оси.

Обозначим $\hat{f}(t, x)$ п. о. продолжение $f(t, x)$ на всю плоскость. Тогда п. о. операторная функция $\hat{F}(t)$ ($t \in (-\infty, \infty)$), определенная равенством

$$(\hat{F}(t)\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t, x-y)\,\varphi(x)\,\overline{\psi(y)}\,dxdy$$

$$(\varphi, \psi \in C_0^\infty(-\infty, \infty)),$$

является п. о. продолжением п. о. операторной функции $F(t)$ с интервала $(-2l, 2l)$ на $(-\infty, \infty)$.

Пусть теперь $\hat{F}(t)$ — любое п. о. продолжение $F(t)$ на всю ось. Рассмотрим функцию

$$\hat{f}(t, x) = (\hat{F}(t)\,\delta_x, \delta_0),$$

являющуюся продолжением $f(t, x)$ с полосы $(-2l, 2l)\times(-\infty, \infty)$ на плоскость. Возникает вопрос, какие условия нужно наложить на $\hat{F}(t)$, чтобы $\hat{f}(t, x)$ была п. о. по всей плоскости?

Обозначим B замыкание симметрического оператора $\varphi \to i\frac{d\varphi}{dx}$, $\varphi(x) \in C_0^\infty(-\infty, \infty)$, в пространстве $\mathfrak{H}$. Так как функция $f(0, x)$ п. о. на всей оси, то B — самосопряженный оператор. Имеет место

Теорема 1. *Для того чтобы функция* $\hat{f}(t, x) = (\hat{F}(t)\,\delta_x, \delta_0)$ $(-\infty < t, x < \infty)$ *была п. о. продолжением* $f(t, x)$ *с полосы* $(-2l, 2l)\times(-\infty, \infty)$ *на всю плоскость, необходимо и достаточно, чтобы при любом* $t \in (-\infty, \infty)$ *оператор* $\hat{F}(t)$ *коммутировал с* B *(т. е. с разложением единицы оператора* B*).*

Доказательство. Так как $f(0, x)$ $(x \in (-\infty, \infty))$ п. о., то

$$f(0, x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} d\sigma(\lambda), \tag{6}$$

где $d\sigma(\lambda)$ — некоторая конечная положительная мера. Тогда

$$(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(0, x-y)\,\varphi(x)\overline{\psi(y)}\,dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(x-y)} d\sigma(\lambda)\,\varphi(x)\,\overline{\psi(y)}\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(\lambda)\,\overline{\tilde{\psi}(\lambda)}\,d\sigma(\lambda),$$

$$\varphi, \psi \in C_0^\infty(-\infty, \infty), \qquad \tilde{\varphi}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda y}\varphi(y)\,dy.$$

Последнее соотношение показывает, что оператор $\Phi : \varphi \to \tilde{\varphi}$ унитарно отображает пространство $\mathfrak{H}$ на $\tilde{\mathfrak{H}} = L_2(d\sigma(\lambda), (-\infty, \infty))$. Положим $\mathfrak{F}(t) = \Phi F(t)\,\Phi^{-1}$ $(t \in (-2l, 2l))$. Операторная функция $\mathfrak{F}(t)$ со значениями в $L_2(d\sigma(\lambda), (-\infty, \infty))$ п. о., и любое ее п. о. продолжение $\hat{\mathfrak{F}}(t)$ на всю числовую ось имеет вид

$$\hat{\mathfrak{F}}(t) = \Phi\hat{F}(t)\,\Phi^{-1}. \tag{7}$$

Если Λ — оператор умножения на независимую переменную в пространстве $L_2(d\sigma(\lambda), (-\infty, \infty))$, то $\Lambda = \Phi B\Phi^{-1}$, и коммутируемость $\hat{F}(t)$ с B равносильна коммутируемости $\hat{\mathfrak{F}}(t)$ с Λ.

Предположим, что $\hat{F}(t)$ коммутирует с B, т. е. $\hat{\mathfrak{F}}(t)$ коммутирует с Λ при всех $t \in (-\infty, \infty)$. Так как оператор Λ имеет простой спектр, то $\hat{\mathfrak{F}}(t)$ является функцией от Λ, т. е.

$$\hat{\mathfrak{F}}(t)\,\tilde{\varphi}(\lambda) = \hat{h}(t, \lambda)\,\tilde{\varphi}(\lambda), \tag{8}$$

где $\hat{h}(t, \lambda)$ при каждом фиксированном t является σ-измеримой функцией по λ. Кроме того, функция $\hat{h}(t, \lambda)$ такова, что при σ-почти всех λ

$$\sum_{j,k=1}^{n} \hat{h}(t_j - t_k, \lambda)\,\xi_j\bar{\xi}_k \geqslant 0 \tag{9}$$

для произвольных $t_j \in (-\infty, \infty)$ и комплексных ξ_j $(j = 1, \ldots, n)$. В самом деле,

$$0 \leqslant \sum_{j,k=1}^{n} (\widehat{\mathfrak{F}}(t_j - t_k)\xi_j\chi_m, \xi_k\chi_m)_{L_2(d\sigma(\lambda),(-\infty,\infty))} =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(t_j - t_k, \mu)\xi_j\chi_m(\mu)\overline{\xi_k\chi_m(\mu)}\,d\sigma(\mu),$$

где

$$\chi_m(\mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\sigma(\Delta_m)}}, & \mu \in \Delta_m = \left[-\dfrac{1}{m} + \lambda, \dfrac{1}{m} + \lambda\right). \\ 0 \quad , & \mu \,\overline{\in}\, \Delta_m \end{cases}$$

Переходя затем к пределу при $m \to \infty$, получаем неравенство (9) при σ-почти каждом λ.

Из (7), (8) следует, что

$$\hat{f}(t, x) = (\hat{F}(t)\delta_x, \delta_0) = (\Phi\hat{F}(t)\Phi^{-1}\Phi\delta_x, \Phi\delta_0)_{L_2(d\sigma(\lambda),(-\infty,\infty))} =$$

$$= (\widehat{\mathfrak{F}}(t)e^{i\lambda x}, 1)_{L_2(d\sigma(\lambda),(-\infty,\infty))} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(t, \lambda)e^{i\lambda x}d\sigma(\lambda),$$

т. е.

$$\hat{f}(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(t, \lambda)e^{i\lambda x}d\sigma(\lambda). \tag{10}$$

Так как $\widehat{\mathfrak{F}}(t) = \mathfrak{F}(t)$ в $(-2l, 2l)$, то $\hat{f}(t, x)$ — продолжение $f(t, x)$ с полосы $(-2l, 2l)\times(-\infty, \infty)$ на всю плоскость. Из неравенства (9) непосредственно следует, что интеграл в (10) является п. о. функцией на всей плоскости. Достаточность в теореме доказана.

Установим необходимость. Если $\hat{f}(t, x)$ — п. о. продолжение $f(t, x)$ с полосы G на плоскость , то для φ, $\psi \in C_0^\infty(-\infty, \infty)$

$$(\hat{F}(t)B\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t, x - y)\, i\frac{d}{dx}\varphi(x)\psi(y)\,dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t, x - y)\varphi(x)\overline{i\frac{d}{dy}\psi(y)}\,dxdy = (\hat{F}(t)\varphi, B\psi).$$

Предельным переходом получаем $(\hat{F}(t)B\varphi, \psi) = (\hat{F}(t)\varphi, B\psi)$ для любых φ, ψ из области определения $\mathfrak{D}(B)$ оператора B. Учитывая самосопряженность B, приходим к требуемой коммутируемости. Теорема полностью доказана.

4. В [3] показано, что продолжения операторной п. о. функции со значениями в некотором гильбертовом пространстве H на всю ось во вполне неопределенном случае (т. е. при «максимальных» дефектных числах) находятся во взаимно однозначном соответствии с «точками» некоторой окружности K_z $(\operatorname{Im} z \neq 0)$, т. е. с ограниченными операторами $M(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda - z}$ в H, расположенными на этой окружности (аналог окружности Г. Вейля — Гамбургера), где $\tau(\lambda)$ — любая операторная мера в представлении (5) (мы пока рассматриваем ортогональные $\tau(\lambda)$).

Рассмотрим п. о. функцию $F(t)$ $(-2l \leqslant t \leqslant 2l)$ со значениями в $\mathfrak{H}$, порожденную п. о. функцией $f(t, x)$ в полосе G. Предположим, что $F(t)$ такова, что имеет место вполне неопределенный случай. Спрашивается, каким образом выделить те «точки» операторной окружности K_z, которым отвечают продолжения $F(t)$ на $(-\infty, \infty)$, порождающие п. о. продолжения $f(t, x)$ с полосы на всю плоскость? Справедлива

Теорема 2. *Для того, чтобы ограниченный оператор в $\mathfrak{H}$, лежащий на операторной окружности K_z, давал продолжение $F(t)$, которое порождается продолжением $f(t, x)$ в п. о. функцию на плоскости, необходимо и достаточно, чтобы он коммутировал с B.*

Доказательство. Пусть $M(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda - z}$ $(\operatorname{Im} z \neq 0)$ соответствует продолжению $\widehat{F}(t)$ $(t \in (-\infty, \infty))$ функции $F(t)$ $(t \in (-2l, 2l))$, порождающему п. о. продолжение $\widehat{f}(t, x)$ функции $f(t, x)$ с полосы на всю плоскость. По теореме 1 $\widehat{F}(t)$ коммутирует при любом $t \in (-\infty, \infty)$ с оператором B. Поэтому на основании формулы обращения

$$((\tau(\lambda_2) - \tau(\lambda_1))\varphi, \psi) = \lim_{c \to \infty} \int\limits_{-c}^{c} \frac{e^{-it\lambda_1} - e^{-it\lambda_2}}{it} (\widehat{F}(t)\varphi, \psi)\, dt$$

$$(\varphi, \psi \in \mathfrak{H})$$

$\tau(\lambda)$ $(\lambda \in (-\infty, \infty))$ коммутирует с B. Из формулы обращения Стилтьеса следует, что коммутируемость B с $\tau(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ равносильна коммутируемости B с $M(z)$ при всех z таких, что $\operatorname{Im} z \neq 0$. Необходимость условия теоремы доказана.

Перейдем к доказательству его достаточности.

Обозначим L_f пополнение множества $C_0^\infty(G)$ функций $u(t, x)$, заданных, финитных и бесконечно дифференцируемых в полосе $G = (-2l, 2l) \times (-\infty, \infty)$, по скалярному произведению

$$(u, v)_f = \int\limits_{-l}^{l} \int\limits_{-l}^{l} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t - s, x - y)\, u(t, x)\, \overline{v(s, y)}\, dt ds dx dy.$$

Нетрудно проверить, что в L_f входят дельта-функции $\delta_{(t,x)}$, сосредоточенные в точке $(t, x) \in G$. Пусть C_1 и C_2 — замыкания операторов $u(t, x) \to i\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}$ и $u(t, x) \to i\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}$, $u \in C_0^\infty(G)$, в пространстве L_f. Операторы C_1 и C_2 эрмитовы и перестановочны на $C_0^\infty(G)$. В силу того, что x пробегает всю ось, оператор C_2 самосопряженный. Если $\widetilde{C}_1$ — самосопряженное расширение C_1, коммутирующее с C_2, то [1, стр. 716] резольвента $\widetilde{R}_z^{(1)}$ оператора $\widetilde{C}_1$ допускает представление

$$(\widetilde{R}_z^{(1)} \delta_{(t,x)}, \delta_{(s,y)})_f = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i[\lambda_1(t-s) + \lambda_2(x-y)]}}{\lambda_1 - z}\, d\varrho(\lambda) \tag{11}$$

$$(t, s \in (-l, l);\ x,\ y \in (-\infty, \infty)),$$

где $\varrho(\lambda) = \varrho(\lambda_1, \lambda_2) = (E_{\lambda_1}^{(1)} E_{\lambda_2}^{(2)} \delta_{(0,0)}, \delta_{(0,0)})_f$ $(E_{\lambda_1}^{(1)}, E_{\lambda_2}^{(2)}$ — разложения единицы операторов $\widetilde{C}_1$ и C_2 соответственно), причем

$$(f(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda_1 t+\lambda_2 x)} d\varrho(\lambda_1, \lambda_2) \qquad ((t, x) \in G).$$

Обозначим теперь L_F гильбертово пространство, получающееся при пополнении множества $C_0^\infty(\mathfrak{H}, (-l, l))$ всех бесконечно дифференцируемых финитных вектор-функций $u(t)$ в $(-l, l)$ со значениями в $\mathfrak{H}$ по скалярному произведению

$$(u, v)_F = \int_{-l}^{l}\int_{-l}^{l} (F(t-s)\, u(t), v(s))\, ds dt.$$

Рассмотрим в L_F симметрический оператор C — замыкание оператора $u(t) \to i\frac{du(t)}{dt}$, $u(t) \in C_0^\infty(\mathfrak{H}, (-l, l))$. Тогда [3] множество всех функций $M(z)$ находится во взаимно однозначном соответствии со всеми самосопряженными расширениями оператора C, причем

$$(M(z)\varphi, \psi) = (R_z(\widetilde{C})\,\delta_0\varphi, \delta_0\psi)_F \qquad (\varphi, \psi \in \mathfrak{H}), \tag{12}$$

где $R_z(\widetilde{C})$ — резольвента самосопряженного расширения $\widetilde{C}$ оператора C, отвечающая $M(z)$, а δ_0 — линейный ограниченный оператор, отображающий $\mathfrak{H}$ в L_F такой, что

$$(\delta_0\varphi, \delta_0\psi)_F = (F(0)\varphi, \psi) \qquad (\varphi, \psi \in \mathfrak{H}).$$

Из того, что $C_0^\infty(G) \subset C_0^\infty(\mathfrak{H}, (-l, l))$, плотно в нем по $(\cdot, \cdot)_F$ и скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_F$ совпадает в силу (3) на $C_0^\infty(G)$ с $(\cdot, \cdot)_\mathfrak{f}$, следует, что $L_\mathfrak{f} = L_F = L$. Поэтому нетрудно убедиться, что $C_1 = C$, $C_2\delta_0\varphi = \delta_0 B\varphi$, $\varphi \in \mathfrak{D}(B)$ и $\delta_0\delta_x = \delta_{(0,x)}$.

Пусть теперь расширение $\widetilde{C}$ оператора C таково, что $M(z)$ коммутирует с B. Пользуясь формулой (12) и плотностью проекции множества $\{\delta_0\varphi\}_{\varphi\in\mathfrak{H}}$ на дефектное подпространство $\mathfrak{N}_z$ оператора C в $\mathfrak{N}_z$, нетрудно получить, что

$$U_z(\widetilde{C})\,U_\zeta(C_2)\,u = U_\zeta(C_2)\,U_z(\widetilde{C})\,u, \qquad u \in \mathfrak{N}_z. \tag{13}$$

Здесь $\zeta\ (\operatorname{Im}\zeta \neq 0)$ — произвольное комплексное число, а $U_\zeta(A) = E + (\zeta - \bar\zeta)\, R_\zeta(A)$ (E — единичный оператор в L) — прообразование Кэли оператора A в точке ζ. Так как $L = \mathfrak{N}_z \oplus \mathfrak{M}_z$ и на $\mathfrak{M}_z$ выполняется (13), то $\widetilde{C}$ коммутирует с оператором C_2. Равенства (11) и (12) влекут соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(d\tau(\lambda_1)\,\delta_x, \delta_0)}{\lambda_1 - z} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda_2 x}}{\lambda_1 - z}\, d\varrho(\lambda_1, \lambda_2),$$

откуда

$$\hat f(t, x) = (\hat F(t)\,\delta_x, \delta_0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda_1 t+\lambda_2 x)}\, d\varrho(\lambda_1, \lambda_2) \qquad (t, x \in (-\infty, \infty)),$$

т. е. функция $\hat f(t, x)$ п. о. Теорема полностью доказана.

Кратко остановимся на случае неортогональных $\tau(\lambda)$. В этом случае [3] продолжения находятся во взаимно однозначном соответствии с операторными функциями $U(\zeta)$ в пространстве $\mathfrak{H}$, голоморфными в верхней полуплоскости, для которых $\|U(\zeta)\| \leqslant 1$.

Подобно теореме 2 можно доказать, что *продолжения операторной п. о. функции $F(t)$, порожденной п. о. функцией $f(t, x)$ в полосе, отвечающие продолжениям $f(t, x)$ на всю плоскость, можно получить, если операторную функцию $U(\zeta)$ брать такой, чтобы при каждом ζ $U(\zeta)$ коммутировала с оператором B*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Изд-во «Наукова думка», К., 1965.
2. М. Л. Горбачук, О представлении положительно определенных операторных функций, УМЖ, т. XVII, № 2, 1965.
3. М. Л. Горбачук, Об описании продолжений положительно определенной операторной функции, УМЖ, т. XVII, № 5.
4. A. Devinatz, On the extensions of the positive definite functions, Acta Math., **102**, 1—2, 1959.
5. М. Г. Крейн, О проблеме продолжения эрмитово-положительных непрерывных функций, ДАН СССР, т. XXVI, № 1, 1940.
6. М. Г. Крейн, Про ермітові оператори з напрямними функціоналами, Зб. праць Ін-ту математики АН УРСР, № 10, 1948.
7. Б. Я. Левин, И. Е. Овчаренко, Описание продолжений эрмитово-положительных функций, ДАН СССР, т. 159, № 4, 1964.
8. М. С. Лившиц, О зеркально-сопряженных и самосопряженных расширениях симметрических операторов..., диссертация, Москва, 1945.
9. Г. И. Эскин, Достаточное условие разрешимости многомерной проблемы моментов, ДАН СССР, т. 133, № 3, 1960.

Поступила 12.VII 1965 г.
Киев