Интегралы по пространству деревьев, связанные с нелинейными параболическими уравнениями

Ю. Л. Далецкий, А. Т. Заплитная

1. Хорошо известно, что решения задачи Коши для линейных параболических уравнений могут быть представлены через интегралы по пространству траекторий [1, 2].

В одном из докладов А. В. Скорохода на семинаре в КГУ было показано, что аналогичные представления можно получить и для некоторых нелинейных параболических уравнений. Этот результат он получил, рассматривая ветвящийся случайный процесс с диффузией [3]. При рассмотрении таких процессов возникает некоторое нелинейное параболическое уравнение для так называемой производящей функции процесса. Решение этого уравнения выражается через среднее по процессу, что приводит к интегралам по пространству ветвящихся траекторий.

В настоящей заметке подобные представления получаются прямым путем и изучается их связь с разностными схемами, соответствующими рассматриваемым дифференциальным уравнениям*.

2. Мы будем рассматривать дифференциальное уравнение с полиномиальной нелинейностью вида

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = L(u) + \sum_{k=2}^{m} b_k(t,x)\,[u(t,x)]^k \quad (-\infty < x < \infty,\ t \geqslant 0), \qquad (1)$$

* Постановка задачи содержится в [6].

где L — дифференциальный оператор второго порядка. Коэффициенты уравнения (1) предполагаются такими, чтобы была обеспечена локальная разрешимость задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием

$$u(0, x) = \varphi(x). \tag{2}$$

Рассмотрим сначала некоторую разностную схему для уравнения (1). Она приведет к алгебраической системе типа

$$u_{j_{n+1}}^{(n+1)} = \sum_{j_n} a_{j_{n+1}j_n}^{(n)} u_{j_n}^{(n)} + \sum_{k=2}^{m} b_{kj_{n+1}}^{(n)} [u_{j_{n+1}}^{(n)}]^k, \tag{3}$$

$$u_{j_0}^{(0)} = \varphi_{j_0}. \tag{4}$$

Рассмотрим для наглядности простейший случай, когда $b_{kj_{n+1}}^{(n)} = 0$ при $k > 2$, т. е. когда уравнение содержит квадратичную нелинейность. Итерируя в этом случае уравнение (3), мы получаем для $u_{j_{n+1}}^{(n+1)}$ выражение вида

$$u_{j_{n+1}}^{(n+1)} = \sum_{j_0, \ldots, j_n} \left\{ \prod_{s=0}^{n} a_{j_{s+1}j_s}^{(s)} \right\} \varphi_{j_0} +$$

$$+ \sum_{j_0, j_0', \ldots, j_n} \prod_{s=n_1+1}^{n} a_{j_{s+1}j_s}^{(s)} b_{2j_{n_1+1}}^{(n_1)} \left\{ \prod_{i=0}^{n_1} a_{j_{i+1}j_i}^{(i)} \prod_{i=0}^{n_1} a_{j'_{i+1}j'_i}^{(i)} \right\} \varphi_{j_0} \varphi_{j_0'} + \ldots; \; (j_{n_1+1} = j'_{n_1+1}). \tag{5}$$

Входящие в эту сумму слагаемые можно описать следующим образом. Каждому произведению $\prod_{s=0}^{n} a_{j_{s+1}j_s}^{(s)}$ можно сопоставить ломаную линию с вершинами в точках (s, j_s). При этом сумма таких произведений может рассматриваться как сумма вкладов от всевозвожных ломаных, входящих в точку $(n+1, j_{n+1})$. Таким же образом во второй сумме формулы (5) произведения $\prod_{i=0}^{n_1} a_{j_{i+1}j_i}^{(i)}$ и $\prod_{i=0}^{n_1} a_{j'_{i+1}j'_i}^{(i)}$ соответствуют паре ломаных, сливающихся в точке $(n_1+1, j_{n_1}+1)$, а произведение $\prod_{s=n_1+1}^{n} a_{j_{s+1}j_s}^{(s)}$ — ломаной, соединяющей эту точку с точкой $(n+1, j_{n+1})$. В результате вторая сумма в (5) может быть истолкована как сумма вкладов от всевозможных ломаных, разветвляющихся один раз по две ветви. Точно так же можно истолковать и дальнейшие слагаемые. Каждое из них будет отвечать некоторой разветвляющейся траектории с кратностью точек ветвления, равной двум (кратностью точки ветвления мы будем называть количество ветвей, на которое разветвляется в этой точке кривая).

Аналогичная ситуация имеет место в случае общего уравнения (3) с той лишь разницей, что придется рассматривать ломаные с произвольными кратностями точек ветвления $k \leqslant m$ и каждой точке ветвления (i, j_i) кратности k будет соответствовать множитель $b_{kj_i}^{(i-1)}$.

Можно показать, что аналогичная картина имеет место и для дифференциальных уравнений, причем возникающие там представления могут быть получены путем предельного перехода из представлений типа (5) для последовательности разностных уравнений, аппроксимирующей дифференциальное уравнение.

3. Обозначим через $M_p(\alpha, \beta; \vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta)$ пространство непрерывных вектор-функций $\vec{x}(t)$ размерности p, определенных на промежутке $[\alpha, \beta]$ и принимающих на концах его соответственно значения $\vec{x}_\alpha$, $\vec{x}_\beta$. Пусть вектор $\vec{\tau}(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ определяет разбиение $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n < T$ промежутка $[0. T]$, $\vec{k}$ и $\vec{\varkappa}$ — векторные индексы с целочисленными координатами. Рассмотрим, далее, линейный оператор $S_{\nu\varkappa}$, повышающий размерность и действующий по закону

$$S_{\nu\varkappa}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+\varkappa}),$$

где

$$x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_{m+\varkappa} = x_\nu \qquad (1 \leqslant \nu \leqslant m).$$

Обозначим через X набор векторов $\vec{x}_{p_n}(0), \vec{x}_{p_{n-1}}(\tau_1), \ldots, \vec{x}_{p_0}(\tau_n)$ убывающей размерности $\left(p_0 = 1,\ p_s = \sum_{i=1}^{s} \varkappa_{n-i+1} - (s-1),\ s = 1, \ldots, n\right)$.

Введем в рассмотрение пространство

$$\mathfrak{M}(\vec{\tau}, \vec{k}, \vec{\varkappa}; X, x_T) = M_{p_n}(0, \tau_1; \vec{x}_{p_n}(0);\ S_{k_1\varkappa_1}\vec{x}_{p_{n-1}}(\tau_1)) \times$$

$$\times M_{p_{n-1}}(\tau_1, \tau_2; \vec{x}_{p_{n-1}}(\tau_1); S_{k_2\varkappa_2}\vec{x}_{p_{n-2}}(\tau_2)) \times \ldots \times M_{p_0}(\tau_n, T; \vec{x}_{p_0}(\tau_n); x_T), \quad (6)$$

где

$$1 \leqslant k_j \leqslant \sum_{i=j+1}^{n} \varkappa_i - (n-j-1) \ (j = 1, 2, \ldots, n-1),\ k_n = 1,\ x_T = x(T),$$

и, наконец, пространство

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(T, x_T) = \bigcup_{(\vec{k}, \vec{\varkappa})} \mathfrak{M}_{\vec{k}\vec{\varkappa}}(T, x_T),$$

где

$$\mathfrak{M}_{\vec{k}\vec{\varkappa}}(T, x_T) = \bigcup_{(\vec{\tau}, X)} \mathfrak{M}(\vec{\tau}, \vec{k}, \vec{\varkappa}, X, x_T).$$

Пространство $\mathfrak{M}(T, x_T)$ можно рассматривать как пространство многозначных функций $x(t)$, имеющих в каждой точке $(\tau_j, x_{k_j}(\tau_j))$ точку ветвления кратности $\varkappa_j$. Элементы этого пространства будем называть деревьями.

Введем в пространстве $\mathfrak{M}_{\vec{k}\vec{\varkappa}}(T, x_T)$ меру. Пусть $G_p(t_0, t, \vec{x}_0, \vec{x})$ фундаментальное решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{p} L_k(u),$$

где $L_k(u)$ при каждом $k = 1, 2, \ldots, p$ — один и тот же дифференциальный оператор $L(u)$, но действующий по разным координатам p-мерного вектора $\vec{x}(t)$.

Пусть $B = \{\vec{\tau}: \alpha_j \leqslant \tau_j \leqslant \beta_j,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$, $q\,(0 < t_1 < \ldots < t_l < T)$ — разбиение интервала $[0, T]$, точки которого не попадают в интервалы $[\alpha_j, \beta_j]$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, A — борелевское множество в пространстве R_q векторов $\{\vec{x}(t_1), \ldots, \vec{x}(t_l)\}$ (размерность каждого из векторов $\vec{x}(t_j)$ зависит от того, в какой из интервалов $[\tau_s, \tau_{s+1}]$ попадет точка t_j) и C — борелевское множество в пространстве векторов $\{\vec{x}_{p_n}(0), \vec{x}_{p_{n-1}}(\tau_1), \ldots, \vec{x}_{p_0}(\tau_n)\}$.

Определим на множестве

$$Q(q, A, B, C) = \{\vec{x}(t) : (\vec{x}(t_1), \ldots, \vec{x}(t_l)) \in A, \vec{\tau} \in B, (\vec{x}_{p_n}(0), \ldots, \vec{x}_{p_0}(\tau_n)) \in C\} \quad (7)$$

меру, пользуясь формулой

$$\mu_{b,\varphi}(Q(q, A, B, C)) = \int\limits_A \int\limits_B \int\limits_C \prod_{s=0}^{n} \{b_{\varkappa_s}(\tau_s, x_{k_s}(\tau_s)) G_{p_{n-s}}(\tau_s, t_{j_s+1}; \vec{x}_{p_{n-s}}(\tau_s), \vec{x}(t_{j_s+1}) \times$$

$$\times \prod_{j=j_s+1}^{j_{s+1}} G_{p_{n-s}}(t_j, t_{j+1}; \vec{x}(t_j), \vec{x}(t_{j+1}) \cdot G_{p_{n-s}}(t_{j_{s+1}}, \tau_{s+1}; \vec{x}(t_{j_{s+1}}); \vec{x}_{p_{n-s+1}}(\tau_{s+1}) \times$$

$$\times \varphi(\vec{x}_{p_n}(0))\, d\vec{x}(t_1) \ldots d\vec{x}(t_l)\, d\vec{\tau} d\vec{x}_{p_n}(0)\, d\vec{x}_{p_{n-1}}(\tau_1) \ldots d\vec{x}_{p_0}(\tau_n) \quad (8)$$

при условии, что

$$t_{j_s} < \tau_s < t_{j_{s+1}} \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \quad \tau_0 = 0, \; b_{\varkappa_0}(\tau_0, x_{k_0}(\tau_0)) = 1,$$

$$\varphi(\vec{x}_{p_n}(0)) = \varphi(x_1(0)) \cdot \varphi(x_2(0)) \ldots \varphi(x_{p_n}(0)),$$

где

$$\vec{x}_{p_n}(0) = (x_1(0), x_2(0), \ldots, x_{p_n}(0)).$$

Под $\mu_{b,\varphi}(Q)$ будем, далее, понимать σ-аддитивную меру, полученную путем продолжения на некоторое σ-кольцо пространства $\mathfrak{M}_{\vec{k}\vec{\varkappa}}(T, x_T)$, содержащее все цилиндрические множества вида (7).

Мы будем говорить, что $F[x(t)]$ есть функционал на пространстве деревьев, если он определен на каждом из пространств $\mathfrak{M}_{\vec{k}\vec{\varkappa}}(T, x_T)$. В случае, когда он интегрируем по мерам $\mu_{b,\varphi}(Q)$, положим

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} F[x(t)]\, d\mu_{b,\varphi}(Q) = \sum_{(\vec{k}, \vec{\varkappa})} \int\limits_{\mathfrak{M}_{\vec{k}\vec{\varkappa}}} F[x(t)]\, d\mu_{b,\varphi}(Q).$$

4. Рассмотрим дифференциальное уравнение (1).

Теорема 1. *Пусть функции $\varphi(x)$, $b_k(t, x)$ непрерывны и ограничены при $0 \leqslant t \leqslant T$, $-\infty < x < \infty$. Тогда при достаточно малом T ряд*

$$u(T, x_T) = \mu_{b,\varphi}(\mathfrak{M}) = \sum_{(\vec{k},\vec{\varkappa})} \mu_{b,\varphi}(\mathfrak{M}_{\vec{k}\vec{\varkappa}}(T, x_T)) \quad (9)$$

абсолютно сходится и представляет собой решение задачи Коши (1) — (2).

Обратно, если задача Коши (1) — (2) разрешима на интервале $[0, T]$, то ее решение представимо (9).

Пусть функции $\frac{b_2(t, x)}{b_1(t, x)}, \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$ измеримы и ограничены и пусть

$$F[x(t)] = \frac{\varphi_2(\vec{x}_{p_n}(0))}{\varphi_1(\vec{x}_{p_n}(0))} \prod_{s=1}^{n} \frac{b^{(2)}_{\varkappa_s}(\tau_s, x_{k_s}(\tau_s))}{b^{(1)}_{\varkappa_s}(\tau_s, x_{k_s}(\tau_s))}$$

при $x(t) \in \mathfrak{M}_{\vec{k}\vec{\varkappa}}(T, x_T)$.

Тогда при условии, что на интервале $[0, T]$ оба выражения $\mu_{b_1,\varphi_1}(\mathfrak{M})$ и $\mu_{b_2,\varphi_2}(\mathfrak{M})$ имеют смысл, справедлива формула

$$\mu_{b_2,\varphi_2}(\mathfrak{M}) = \int\limits_{\mathfrak{M}} F[x(t)]\, d\mu_{b_1,\varphi_1}.$$

Доказательство первого утверждения получается путем оценки членов ряда (9) и непосредственной подстановки его в уравнение.

При доказательстве обратного утверждения существенно используется мультипликативная формула, установленная в [5].

Пусть $V[x(t), t]$ — некоторая непрерывная ограниченная по x и t функция. Под интегралом

$$\int_0^T V[x(t), t]\,dt,$$

где $x(t)$ — некоторое дерево, мы будем понимать сумму интегралов по всем его ветвям, т. е.

$$\int_0^T V[x(t), t]\,dt = \sum_{s=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{p_{n-s+1}} \int_{\tau_{s-1}}^{\tau_s} V[x_k(t), t]\,dt.$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 2. *При условиях теоремы 1 функция*

$$u(T, x_T) = \int_{\mathfrak{M}} \exp\left\{\int_0^T V[x(t), t]\,dt\right\} d\mu_{b,\varphi}(Q)$$

является решением задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(u) + V(x, t)\,u + \sum_{k=2}^{m} b_k(t, x)\,u^k(t, x),\ \ u(0, x) = \varphi(x).$$

5. Теоремы, аналогичные приведенным выше, справедливы и для разностных уравнений типа (3). В рассматриваемом случае можно провести исследование, аналогичное проведенному в [**4**] для линейного случая. Если имеется последовательность таких уравнений, линейные части которых образуют равномерно устойчивую разностную схему для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = L(u)$, то можно показать, что последовательность соответствующих мер $\mu_{b,\varphi}(Q)$ слабо сходится к мере того же типа, отвечающей дифференциальному уравнению (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Кас, On distributions of certain Wiener functionals, Trans. Amer. Math. Soc., 65, 1, 1949, 1—13.
2. Ю. Л. Далецкий, Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями, УМН, т. 17, вып. 5 (107), 1962, 1—115.
3. А. В. Скороход, Ветвящиеся диффузионные процессы, Теор. вероятн. и ее примен., т. 9, вып. 3, 1964, 492—497.
4. Е. В. Майков, С. В. Фомин, Меры в функциональном пространстве и разностные схемы, ДАН СССР, т. 149, № 3, 1963, 525—528.
5. А. Т. Заплітна, Про один наближений метод розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь, Доп. АН УРСР (в печати).
6. Ю. Л. Далецкий, С. В. Фомин, Обобщенные меры в функциональных пространствах, Теор. вероятн. и ее примен., т. X, в. 2, 1965.

Поступила 9.VI 1965 г.
Киев