К разложению квадратной полиноминальной матрицы в произведение линейных множителей

П. С. Казимирский

В работе при некоторых предположениях указаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы матрица

$$A(x) = A_0 x^2 + A_1 x + A_2$$

могла быть представлена в виде произведения двух матриц первой степени, где A_j $(j = 0, 1, 2)$ суть квадратные матрицы n-го порядка с элементами из алгебраически замкнутого поля P характеристики нуль, $\det A_0 \neq 0$.

Обозначим через $A_*(x)$ взаимную матрицу матрицы $A(x): A(x) A_*(x) = A_*(x) A(x) = E \det A(x)$, E — единичная матрица.

Из $2n$ корней уравнения $\det A(x) = 0$ выделим i различных корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ кратности $k_1, k_2, \ldots, k_i$ соответственно, причем $k_1 + k_2 + \ldots + k_i = n$.

Определение. Матрицей, которая соответствует n выделенным корням уравнения $\det A(x) = 0$, назовем матрицу:

$$M_{A(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_i^{(k_i)}] = \begin{pmatrix} A_*(\alpha_1) \\ A'_*(\alpha_1) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_*^{(k_1-1)}(\alpha_1) \\ A_*(\alpha_2) \\ A'_*(\alpha_2) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_*^{(k_2-1)}(\alpha_2) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_*(\alpha_i) \\ A'_*(\alpha_i) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_*^{(k_i-1)}(\alpha_i) \end{pmatrix};$$

$A_*^{(s)}(x)$ — производная s-го порядка матрицы $A_*(x)$.

Теперь установим связь между рангом только что определенной матрицы и фактом разложимости матрицы $A(x)$ в произведение линейных множителей. Для этого докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть $N(x)$ — полиномиальная матрица с элементами из $P[x]$ с m строками и n столбцами $(m \leqslant n)$, субдетерминанты m-го порядка которой не все равны нулю.*

Для того чтобы субдетерминанты m-го порядка матрицы $N(x)$ имели общим делителем $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)$, $\alpha_i \in P$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, необходимо и достаточно, чтобы $N(x) = D_k(x) L(x)$, где $\det D_k(x) = d(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k)$, $d \in P$.

Достаточность очевидна, так как для разрешимости матричного уравнения $D_k(x) X = N(x)$ необходимо и достаточно, чтобы ранги матриц $D_k(x)$ и $(D_k(x)\ N(x))$ были равны и общие наибольшие делители их субдетерминантов m-го порядка совпадали с точностью до делителей единицы кольца $P[x]$ (см. [2]).

Отсюда уже следует, что $\det D_k(x)$ должен делить все субдетерминанты m-го порядка матрицы $N(x)$.

Необходимость докажем индукцией по k. Так как ранг матрицы $N(\alpha_1)<m$, то на основании теоремы Безу, заключаем, что $N(x)=D_1(x)L_{k-1}(x)$, где $\det D_1(x)=d_1(x-\alpha_1)$ $d_1\in P$, т. е. при $k=1$ необходимость имеет место.

Пусть $N(x)=D_{k-1}(x)L_1(x)$, $\det D_{k-1}(x)=d(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{k-1})$. Так как субдетерминанты m-го порядка мартицы $L_1(x)$ имеют множитель $x-\alpha_k$, то так же, как и в случае $k=1$, убеждаемся, что $N(x)=D_{k-1}(x)R(x)L(x)$, где $\det R(x)=d_k(x-\alpha_k)$, $d_k\in P$.

Лемма 2. *Пусть субдемертинанты m-го порядка матрицы $H(x)$ имеют общий делитель $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_k)$ и пусть, далее, субдетерминанты $m-i$-го порядка подматрицы*

$$\begin{pmatrix} a_{i+11}(x) & a_{i+12}(x) & \dots & a_{i+1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(x) & a_{m2}(x) & \dots & a_{mn}(x) \end{pmatrix}$$

матрицы $N(x)$ имеют общий делитель $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_r)$, причем $r<k$.

При этих предположениях существует такая обратимая над P матрица S, что в матрице $SN(x)$ субдетерминанты порядка $m-i+1$, составленные из последних $m-i+1$ строк матрицы $SN(x)$, имеют общим делителем полином $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_r)(x-\alpha_{r+1})$.

Доказательство. На основании леммы 1 имеем

$$N(x)=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & 0 & & & D_r(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}(x) & \dots & a_{in}(x) \\ a'_{i+11}(x) & \dots & a'_{i+1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{m1}(x) & \dots & a'_{mn}(x) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Обозначим вторую матрицу соотношения (1) через $N_1(x)$.

Если субдетерминанты $m-i$-го порядка подматрицы матрицы $N_1(x)$, составленной из заштрихованных элементов, имеют общий делитель $x-\alpha_{r+1}$, то, на основании леммы 1, все доказано. Если нет, — то, так как α_{r+1} является корнем всех субдетерминантов m-го порядка матрицы $N_1(x)$, заключаем, что существуют такие обратимые над P матрицы R и S, что

$$SN(x)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & x-\alpha_{r+1} & p_{i+1} & \dots & p_m \\ & 0 & & 0 & & & \\ & & & \vdots & D_r(x) & & \\ & & & 0 & & & \end{pmatrix} RN_1^1(x), \tag{2}$$

где $p_{i+1},\dots,p_m\in P$.

Учитывая лемму 1 и соотношение (2), видим, что лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — *n корней* (*с учетом их кратности*) *уравнения* $\det A(x) = 0$.

Для существования матрицы $B(x) = B_0 x + B_1$, $\det B_0 \neq 0$, *корни детерминанта которой совпадали бы с выделенными n корнями и которая делила бы матрицу A(x) слева, достаточно, чтобы ранг матрицы* $M_{A(x)}[\alpha_1^{k_1}, \ldots, \alpha_i^{(k_i)}]$ *был равен n.*

Доказательство. Легко видеть, что не существует такой обратимой над P матрицы Q, чтобы матрица $A_*(x)Q$ содержала столбец, все элементы которого делились бы на $(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_i)^{k_i}$. В противном случае ранг матрицы $M_{A(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_i^{(k_i)}]$ был бы меньше n, что противоречит условию леммы.

Пусть теперь R_1 — такая обратимая над P матрица, что

$$R_1 A(x) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ 0 & & & & 1 & \\ & & & & & x-\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-11}(x) & \ldots & a_{n-1n}(x) \\ a'_{n1}(x) & \ldots & a'_{nn}(x) \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Очевидно, ни один из оставшихся $n-1$ выделенных корней уравнения $\det A(x) = 0$ не обращает в нуль заштрихованную строку в соотношении (3), так как, предполагая противоположное и учитывая лемму 2, мы получили бы, что существует такая обратимая над P матрица Q, что матрица $A_*(x)Q$ будет содержать столбец, все элементы которого делятся на $(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_i)^{k_i}$, что противоречит замечанию, сделанному в начале этого доказательства. Поэтому существует такая обратимая матрица R_2, что

$$R_2 R_1 A(x) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & 0 & & \\ & & \cdot & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & 1 & & \\ 0 & & & & & x-\alpha_2 & s \\ & & & & & 0 & x-\alpha_1 \end{pmatrix} A_2(x), \quad s \in P.$$

Аналогично предыдущему доказывается, что ни один из оставшихся $n-2$ выделенных корней не обращает в нуль всех субдетерминантов второго порядка подматрицы матрицы $A_2(x)$, составленной из двух ее последних строк.

Пусть уже построены такие обратимые над P матрицы $R_1, R_2, \ldots, R_k$, $k < n$, что

$$R_k \ldots R_2 R_1 A(x) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & 1 & \\ 0 & & & & & B_{n-k}(x) \end{pmatrix} A_k(x),$$

где $B_{n-k}(x)$ — квадратная матрица первой степени, порядка k, старший коэффициент которой обратим и ни один из оставшихся $n-k$ выделенных корней не обращает в нуль всех субдетерминантов k-го порядка подматрицы матрицы $A_k(x)$, составленной из k ее последних строк.

Учитывая лемму 2, заключаем, что существует такая обратимая над P матрица R_{k+1}, что

$$R_{k+1}R_k \ldots R_2R_1A(x) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & x-\alpha_{k+1} & s_2 \ \ldots \ s_k & \\ & & & & 0 & & \\ & 0 & & & \vdots & B_{n-k}(x) & \\ & & & & 0 & & \end{pmatrix} A_{k+1}(x).$$

Очевидно, старший коэффициент матрицы

$$B_{n-k-1}(x) = \begin{pmatrix} x-\alpha_{k+1} & s_2 \ \ldots \ s_k \\ 0 & \\ \vdots & B_{n-k}(x) \\ 0 & \end{pmatrix}, \quad s_2, \ldots, s_k \in P,$$

обратим.

Продолжая так шаг за шагом, получим разложение $A(x) = B(x)A_n(x)$, в котором $B(x)$ удовлетворяет требуемым условиям, что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Если матрица $A(x)$ представлена в виде $A(x) = B(x)C(x)$, $B(x) = B_0x + B_1$, $\det B_0 \neq 0$ и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ суть n корней (с учетом их кратности) уравнения $\det B(x) = 0$, отличные от остальных корней уравнения $\det A(x) = 0$, то ранг матрицы $M_{A(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_i^{(k_i)}]$ равен n.*

Доказательство. Если ранг $M_{A(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_i^{(k_i)}]$ меньше n, то, учитывая условия леммы, убеждаемся в существовании такой обратимой над P матрицы Q, что матрица

$$A_*(x)Q = C_*(x)B_*(x)Q \tag{4}$$

имеет столбец вида

$$\begin{pmatrix} p_1(x) & (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) & \ldots & (x-\alpha_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_n(x) & (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) & \ldots & (x-\alpha_n) \end{pmatrix}.$$

Учитывая (4), имеем

$$\begin{pmatrix} p_1(x) & (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) & \ldots & (x-\alpha_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_n(x) & (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) & \ldots & (x-\alpha_n) \end{pmatrix} = C_*(x)\begin{pmatrix} b_1(x) \\ \ldots \\ b_n(x) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Умножая соотношение (5) слева на матрицу $C(x)$, получаем

$$\begin{pmatrix} p_1'(x) & (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) & \ldots & (x-\alpha_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_n'(x) & (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) & \ldots & (x-\alpha_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(x)\det C(x) \\ \ldots \\ b_n(x)\det C(x) \end{pmatrix}.$$

Отсюда делаем вывод, что все элементы столбца $\begin{pmatrix} b_1(x) \\ \cdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$ матрицы $B_*(x)Q$ делятся на $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$, что невозможно, ибо матрица $B_*(x)$ на основании условия леммы имеет степень $n-1$ и, конечно, не является делителем нуля. Полученное противоречие доказывает наше утверждение. Из лемм 3 и 4 вытекает следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $A_0x^2+A_1x+A_2$, $\det A_0 \neq 0$, A_j $(j=0,1,2)$ *суть квадратные матрицы n-го порядка с элементами из алгебраически замкнутого поля P характеристики нуль.*

Пусть, далее, из 2n корней уравнения $\det A(x)=0$ *могут быть выделены n корней (с учетом их кратности), отличных от остальных корней этого уравнения.*

Для существования в этих предположениях матрицы $B(x)=B_0x+B_1$, $\det B_0 \neq 0$, *корни детерминанта которой совпадали бы с выделенными n корнями и которая делила бы матрицу* $A(x)$ *слева, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы* $M_{A(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_i^{(k_i)}]$ *был равен n.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Лопатинский, Разложение полиномиальной матрицы на множители Научн. зап. Львовск. политехн. ин-та. сер. физ.-матем., № 2, 1957, 3—7.
2. П. С. Казимирский, Условия совместности неоднородной системы линейных уравнений в некоммутативном кольце главных идеалов, Научн. зап. Львовск. политехн. ин-та, сер. физ.-матем., № 1, 1955, 45—50.
3. П. С. Казимирский, Разложение полиномиальной матрицы в произведение матриц первой степени, Докл. Львовск. политехн. ин-та, математика, т. IV вып. 1, 2, 1960, 11—15.

Поступила 16.IV 1963 г.
Львов