Абсолютная непрерывность семейства мер, зависящих от параметра

А. В. Скороход

Цель настоящей заметки — найти в терминах характеристических функционалов достаточные условия для абсолютной непрерывности семейства мер μ_t, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, определенных в некотором функциональном пространстве. Эта заметка может рассматриваться как дополнение результатов § 5 [1] и отчасти решает поставленную в [1] задачу о разработке алгоритмов, позволяющих использовать аппарат характеристических функционалов в конкретных вопросах теории случайных процессов.

Так как для большинства случайных процессов, рассматриваемых в теории и важных для приложений, соответствующую им меру можно поместить в гильбертово пространство, мы будем рассматривать совокупность мер μ_t, заданную на σ-алгебре $\mathfrak{B}$ всех борелевских множеств некоторого сепарабельного гильбертового пространства H. Предполагается, что меры μ_t определены своими характеристическими функционалами

$$f_t(z) = \int e^{i(z, x)} \mu_t(dx), \tag{1}$$

$z \in H$, (z, x) — скалярное произведение в H. Мы будем изучать условия, при которых μ_{t_2} абсолютно непрерывно относительно μ_{t_1} при $t_1 < t_2$.

1. Рассмотрим пространство C_H непрерывных ограниченных числовых функций, определенных на H. Оператор L, определенный на некотором множестве $D \subset C_H$, будем называть оператором типа S, если он коммутирует с любым оператором сдвига $S_a (a \in H)$, $S_a \varphi(z) = \varphi(z + a)$. Предположим, что существует плотность меры μ_t относительно меры μ_s. Обозначим ее через $\varrho_{s, t}(x) = \frac{d\mu_t}{d\mu_s}(x)$. Тогда $\varrho_{s, t}(x) = \varrho_{s, u}(x)\varrho_{u, t}(x)$ при $s < u < t$. Пусть также существует $\lim\limits_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta}[\varrho_{t, t+\Delta}(x) - 1] = \alpha_t(x)$ и интеграл $\int e^{i(z, x)} \alpha_t(x) \times$

$\times \varrho_{0,t}(x)\mu_0(dx)$ сходится равномерно относительно t. Тогда

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = \int e^{i(z,x)}\alpha_t(x)\mu_t(dx).$$

Предположим далее, что $\int |\alpha_t(x)|\mu_t(dx) < \infty$. Поскольку множество функций $e^{i(z,x)}$ полно в пространстве функций, интегрируемых по мере $\mu_t(dx)$, то можно указать последовательность тригонометрических многочленов $\sum_k c_k^{(n)} e^{i(z_k^{(n)},x)}$, для которой $\int |\alpha_t(x) - \sum_k c_k^{(n)} e^{i(z_k^{(n)},x)}|\mu_t(dx) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\sum_k c_k^{(n)} f_t(z + z_k^{(n)}) \to \int e^{i(z,x)}\alpha_t(x)\mu_t(dx)$$

равномерно относительно z. Положим

$$L_t\varphi(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_k c_k^{(n)} \varphi(z + z_k^{(n)})$$

для всех $\varphi(z)$, для которых этот предел существует. Этот оператор будет оператором типа S. Таким образом, при наших предположениях существует такое семейство операторов типа $S - L_t$, что $f_t(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = L_t f_t(z). \tag{2}$$

Основная цель этой заметки—найти достаточные условия, при которых из выполнения уравнения (2) для характеристических функционалов вытекала бы абсолютная непрерывность μ_{t_2} относительно μ_{t_1} при $t_1 < t_2$.

Для формулировки этих условий нам понадобится понятие спектральной функции оператора типа S. Предположим, что функция $e^{i(z,x)}$ при каждом x принадлежит области определения оператора L. Поскольку эта функция является собственной для S_a при любом a, то она будет собственной и для оператора L. Пусть $Le^{i(z,x)} = l(x)e^{i(z,x)}$. Функцию $l(x)$ и будем называть спектральной функцией оператора L.

Теорема. *Предположим, что совокупность операторов L_t типа S, определенных при $0 \leqslant t \leqslant t_0$, удовлетворяет следующим условиям:*

1) *задача Коши для уравнения $\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(z) = L_t\varphi_t(z)$ с начальным условием $\varphi_0(z) = f_0(z)$ имеет единственное решение в некотором классе функций, содержащем все характеристические функционалы;*

2) *для L_t при каждом t из $[0, t_0]$ существует спектральная функция $l_t(x)$, эта функция измерима по совокупности переменных, при каждом t сходится интеграл $\int_0^t l_u(x)\,du$, а интеграл $\int |l_t(x)|\, e^{\int_0^t l_u(x)du}\mu_0(dx)$ сходится равномерно относительно t.*

Тогда, если семейство характеристических функционалов $f_t(z)$ удовлетворяет уравнению (2), мера μ_{t_2} абсолютно непрерывна относительно μ_{t_1} при $t_1 < t_2$ и

$$\frac{d\mu_{t_2}}{d\mu_{t_1}}(x) = \exp\left\{\int_{t_1}^{t_2} l_u(x)\,du\right\}. \tag{3}$$

Доказательство. Введем меры $\bar{\mu}_t$, определяемые соотношением

$$\bar{\mu}_t(A) = \int_A \exp\left\{\int_0^t l_u(x)\,du\right\}\mu_0(dx).$$

Существование этого интеграла вытекает из равномерной сходимости итеграла

$$\int_A |l_t(x)| \exp\left\{\int_0^t l_u(x)\,du\right\}\mu_0(dx)$$

и сходимости интеграла при $t = 0$.

Пусть

$$\bar{f}_t(z) = \int e^{i(z,x)}\bar{\mu}_t(dx).$$

Тогда

$$L_t\bar{f}_t(z) = \int [L_t e^{i(z,x)}]\,\bar{\mu}_t(dx) = \int l_t(x)\,e^{i(z,x)}\bar{\mu}_t(dx).$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{f}_t(z) = \int e^{i(z,x)} l_t(x) \exp\left\{\int_0^t l_u(x)\,du\right\}\mu_0(dx) = \int l_t(x)\,e^{i(z,x)}\bar{\mu}_t(dx).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{f}_t(z) = L\bar{f}_t(z).$$

Так как $f_0(z) = \bar{f}_0(z)$, то из условия 1) вытекает, что $f_t(z) = \bar{f}_t(z)$ для всех $t \in [0, t_0]$. Поэтому $\mu_t(A) = \bar{\mu}_t(A)$. Но

$$\bar{\mu}_{t_2}(A) = \int_A \exp\left\{\int_{t_1}^{t_2} l_u(x)\,du\right\}\bar{\mu}_{t_1}(dx).$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Из формулы (3) вытекает, что при $t_1 < t_2$ существует и $\frac{d\mu_{t_1}}{d\mu_{t_2}}(x)$, причем $\frac{d\mu_{t_1}}{d\mu_{t_2}}(x) = \exp\left\{-\int_{t_1}^{t_2} l_u(x)\,du\right\}$, так что формула (3) справедлива и при $t_1 > t_2$.

Замечание 2. Для равномерной сходимости интеграла

$$\int | l_t(x)| \exp\left\{\int_0^t l_u(x)\,du\right\}\mu_0(dx)$$

достаточно, чтобы при некотором $\varepsilon > 0$

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant t_0}\int \exp\left\{(1+\varepsilon)\int_0^t l_u(x)\,du\right\}\mu_0(dx) < \infty$$

и для всех $n > 0$ $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant t_0}\int |l_t(x)|^n\mu_0(dx) < \infty$.

Действительно, для равномерной сходимости $\int g_t(x)\mu_0(dx)$ достаточна равномерная интегрируемость, а она будет вытекать из равномерной ограниченности при некотором $\varepsilon > 0$ интеграла $\int |g_t(x)|^{1+\varepsilon}\mu_0(dx)$. При наших условиях

$$\int\left(|l_t(x)|\exp\left\{\int\limits_0^t l_u(x)\,du\right\}\right)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}\mu_0(dx) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}\int |l_t(x)|^{\frac{2(1+\varepsilon)}{\varepsilon}}\mu_0(dx) + \frac{2+\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}\int \exp\left\{(1+\varepsilon)\int\limits_0^t l_u(x)\,du\right\}\mu_0(dx)$$

(мы использовали неравенство Юнга: $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $pq > 0$).

Замечание 3. Достаточно, чтобы уравнение (2) имело единственное решение для задачи Коши в классе функционалов, содержащих $f_t(z)$ и $\bar{f}_t(z)$ (последние введены при доказательстве теоремы).

Рассмотрим семейства мер, получаемых из данной меры μ_0 переносом на ta, $a \in H$, при этом семейство характеристических операторов, определяющих эти меры, будет

$$f_t^{(1)}(z) = f_0(z)\,e^{it(z,\,a)}.$$

Кроме того, рассмотрим семейство мер, полученных из μ_0 с помощью полугруппы T_t линейных преобразований с производящим оператором $G : G = \frac{d}{dt}T_t|_{t=0}$. Такое семейство определяется характеристическим функционалом $f_t^{(2)}(z) = f_0(T_t^* z)$, так как семейство мер имеет вид: $\mu_t(A) = \mu_0(T_t^{-1}A)$. В этих случаях

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t^{(1)}(z) = i\,(a,\,z)\,f_t^{(1)}(z)\,, \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t^{(2)}(z) = \delta^1\,[f_0(T_t^* z);\quad G^* T_t^* z] = \delta^1\,[f_t^{(2)}(z);\quad G^* T_t^* z]\,, \tag{5}$$

где $\delta^1\,[\varphi(z);\ z_1]$ обозначает первую вариацию $\varphi(z)$:

$$\delta^1\,[\varphi(z);\,z_1] = \frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(z+\lambda z_1)\,|_{\lambda=0}\,.$$

Если для данного $f_0(z)$ возможно найти такой оператор $L_t^{(1)}$ или оператор $L_t^{(2)}$ (оба типа S), что выполняются соотношения

$$i\,(z,\ a)\,f_t^{(1)}(z) = L_t^{(1)} f_t^{(1)}(z), \tag{6}$$

или

$$\delta^1\,[f_t^{(2)}(z);\quad G^* T_t^* z] = L_t^{(2)} f_t^{(2)}(z), \tag{7}$$

то можно использовать доказанную теорему для доказательства абсолютной непрерывности мер при сдвигах и при линейных преобразованиях. Чтобы пояснить возможность применения теоремы для получения конкретных результатов, рассмотрим случай гауссовских мер. Абсолютной непрерывности гауссовских мер при сдвигах посвящен § 4.4 [2], линейные преобразования гауссовских мер в гильбертовом пространстве рассматриваются в [3].

2. Если μ — гауссовская мера в H, то существует вполне непрерывный неотрицательный симметричный оператор R с конечным следом и элемент a из H такие, что характеристический функционал меры будет иметь вид: $\exp\left\{i(a, z) - \frac{1}{2}(Rz, z)\right\}$.

Заметим, что всякий оператор в вариационных производных является оператором типа S, если он имеет постоянные коэффициенты.

Для наших целей достаточно будет дифференциальных операторов второго порядка (или ниже). Подсчитаем первую и вторую вариации от гауссовского характеристического функционала:

$$\delta^1\left[\exp\left\{i(a, z) - \frac{1}{2}(Rz, z)\right\};\ z_1\right] = \exp\left\{i(a, z) - \frac{1}{2}(Rz, z)\right\} \times$$
$$\times\left[-(Rz, z_1) + i(a, z_1)\right]. \tag{8}$$

Пусть

$$\delta^2[\varphi(z);\ z_1, z_2] = \frac{\partial^2}{\partial\lambda_1 \partial\lambda_2}\varphi(z + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)|_{\lambda_1=\lambda_2=0}$$

— вторая вариация функции $\varphi(z)$. Если e_k — полная ортонормированная система в H, а C — некоторый оператор, то будем обозначать

$$\delta^2[\varphi(z);\ C] = \sum_{k=1}^{\infty}\delta^2[\varphi(z); e_k, Ce_k],$$

если последнее выражение имеет смысл. Вторая вариация будет использоваться лишь для характеристических функционалов, для которых $a = 0$. Легко подсчитать, что

(RZ, CRZ)

$$\delta^2\left[\exp\left\{-\frac{1}{2}(Rz, z)\right\};\ C\right] = \exp\left\{-\frac{1}{2}(Rz, z)\right\}\left[(Rz, Cz) - \sum_{k=1}^{\infty}(Re_k, Ce_k)\right]; \tag{9}$$

выражение $\sum_{k=1}^{\infty}(Re_k, Ce_k)$ представляет собой след оператора RC.

I. Рассмотрим семейство сдвигов гауссовской меры μ_0 с характеристическим функционалом $\exp\left\{-\frac{1}{2}(Rz, z)\right\}$. Тогда

$$f_t(z) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(Rz, z) + it(a, z)\right\}.$$

Исходя из формул (8), (4) и (6), убеждаемся, что $f_t(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}f_t(z) = -i\delta^1[f_t(z);\ b] - t(a, b)f_t(z), \tag{10}$$

где b таково, что $(a, z) = (Rz, b)$ для всех z. Спектральная функция оператора L_t в нашем случае будет

$$l_t(x) = (x, b) - t(a, b).$$

Следовательно,

$$\exp\left\{\int_0^t l_u(x)\,du\right\} = \exp\left\{t(x, b) - \frac{t^2}{2}(a, b)\right\}.$$

Легко убедиться, что μ_t также будут гауссовскими мерами и что уравнение (10) в классе гауссовских характеристических функционалов имеет единственное решение для задачи Коши. Кроме того, выполняются условия замечания 2. Поэтому можно воспользоваться теоремой и значит

$$\frac{d\mu_t}{d\mu_0}(x) = \exp\left\{t(x, b) - \frac{t^2}{2}(a, b)\right\}.$$

Заметим, что b не обязано принадлежать H, а может принадлежать пополнению H в метрике

$$(x, y)_1 = (Rx, y) = (R^{1/2}x, R^{1/2}y).$$

Если обозначить это пополнение H_1, то оператор $R^{1/2}$ можно по непрерывности продолжить на H_1, причем $R^{1/2}H_1 \subset H$. Переписав условие $(a, z) = (Rz, b)$ в виде: $(a, z) = (R^{1/2}R^{1/2}b, z)$, убеждаемся, что для абсолютной непрерывности μ_t относительно μ_0 достаточно, чтобы $a = R^{1/2}b_1$, где $b_1 = R^{1/2}b \in H$.

II. Пусть имеется семейство гауссовских мер с характеристическими функционалами

$$f_t(z) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(R_t z, z)\right\}.$$

Предположим существует $\frac{d}{dt}R_t = R_t'$. Тогда

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = \exp\left\{-\frac{1}{2}(R_t z, z)\right\}\left[-\frac{1}{2}(R_t' z, z)\right] = -\frac{1}{2}(R_t' z, z) f_t(z).$$

Предположим, что можно найти оператор C_t так, чтобы

$$(C_t R_t z, R_t z) = (R_t' z, z)$$

и сходился ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(e_k, R_t C_t e_k) = c(t)$. Тогда $f_t(z)$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = -\frac{1}{2}\delta^2[f_t(z);\ C_t] - \frac{c(t)}{2}f_t(z) \tag{11}$$

(мы использовали формулу (9)). Определим спектральную функцию оператора, стоящего в правой части (11). Поскольку

$$\delta^2[e^{i(z,x)};\ C] = -(Cx, x)\, e^{i(z,x)},$$

то

$$l_t(x) = \frac{1}{2}(C_t x, x) - \frac{c(t)}{2}.$$

В том случае, когда $\bar{\mu}_t$ имеет смысл, она будет также гауссовской мерой. Единственность решения задачи Коши для (11) в классе гауссовских характеристических функционалов также легко устанавливается. При условиях интегрируемости, указанных в замечании 2, плотность меры μ_{t_2} относительно меры μ_{t_1} будет задаваться формулой

$$\frac{d\mu_{t_2}}{d\mu_{t_1}}(x) = \exp\left\{\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(C_t x, x)\,dt - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}c(t)\,dt\right\},$$

где C_t удовлетворяет соотношению $R_t C_t R_t = R_t'$, а $c(t)$ — след оператора $R_t C_t$. Беря, например, $R_t = R_0 + t(R_1 - R_0)$, можем получить условия абсолютной непрерывности меры с характеристическим функционалом $\exp\left\{-\frac{1}{2}(R_1z, z)\right\}$ относительно меры с характеристическим функционалом $\exp\left\{-\frac{1}{2}(R_0z, z)\right\}$.

III. Пусть T_t — полугруппа преобразований с производящим оператором G, A^* — сопряженный к A оператор, а семейство характеристических функционалов имеет вид

$$f_t(z) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(RT_t^*z, T_t^*z)\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}(T_tRT_t^*z, z)\right\}.$$

При этом

$$\delta^1 [f_t(z), \cancel{T_t^*}G^*z] = -(T_tRT_t^*z, \cancel{T_t^*}G^*z) f_t(z),$$

а

$$\delta^2 [f_t(z); C] = [(CT_tRT_t^*z, T_tRT_t^*z) - \sum_{k=1}^{\infty} (CT_tRT_t^*e_k, e_k)] f_t(z).$$

Предположим, существует такое C_t, что

$$(T_tRT_t^*z, \cancel{T_t^*}G^*z) = (C_tT_tRT_t^*z, T_tRT_t^*z) \tag{12}$$

и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (C_tT_tRT_t^*e_k, e_k) = c(t)$ сходится. Используя формулы (5) и (7), убеждаемся, что

$$\frac{\partial f_t(z)}{\partial t} = -\delta^2 [f_t(z); C_t] - c(t) f_t(z),$$

и можно опять применить рассуждения предыдущего пункта. Условие (12) выполняется, если $G = RT_t^*C_t$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Скороход, Конструктивные методы задания случайных процессов УМН, 20 : 3, 1965, 67—87.
2. У. Гренандер, Случайные процессы и статистические выводы, ИЛ, М., 1961.
3. В. В. Баклан, А. Д. Шаташвілі, Умови абсолютної неперервності ймовірностних мір, що відповідають гауссівським випадковим величинам у гільбертовому просторі, Доп. АН УРСР, № 1, 1965, 23—26.

Поступила 26.II 1965 г.

Киев