Некоторые приложения индекса Пуанкаре

Черевичный П. Т.

В предлагаемой заметке находится тот случай, когда индекс Пуанкаре [1] особой точки полностью определяет структуру этой точки. Показано, как можно использовать этот случай для качественного исследования.

Рассмотрим уравнение

$$y' = \frac{P_n(x, y)}{Q_n(x, y)}, \tag{1}$$

где P_n и Q_n — однородные взаимно простые многочлены степени n с действительными коэффициентами.

Введем обозначения: j — индекс Пуанкаре, N — количество различных инвариантных прямых, E, P, H — соответственно количества эллиптических, параболических и гиперболических секторов, примыкающих к особой точке уравнения (1).

Теорема. *Если для уравнения* (1) *выполняется равенство* $j=-n$, *то окрестность особой точки* (0, 0) *состоит только из* $2n+2$ *гиперболических секторов (т. е., в этом случае индекс Пуанкаре полностью определяет топологическую структуру особой точки).*

Доказательство. Воспользуемся формулами [2]:

$$E = N + j - 1 - \frac{1}{2} P, \tag{3}$$

$$H = N - j + 1 - \frac{1}{2} P. \tag{4}$$

Так как $j = -n$, то из формулы (3) имеем:

$$0 \leqslant N - n - 1 - \frac{1}{2} P. \tag{5}$$

С другой стороны, очевидно,

$$N \leqslant n + 1. \tag{6}$$

Это дает неравенство $0 \leqslant -\frac{1}{2} P$, которое верно лишь при

$$P = 0. \tag{7}$$

Тогда из (5) получаем: $N \geqslant n+1$, что вместе с (6) дает:

$$N = n + 1. \tag{8}$$

Это дает: $E=0$, $H=2n+2$. Теорема доказана.

Приводимые ниже следствия позволяют выполнить качественное исследование некоторого уравнения с помощью другого уравнения.

Следствие 1. *Пусть для уравнения* (1) $j=n$. *Тогда для уравнений* $y'=\frac{Q_n}{P_n}$ *и* $y'=-\frac{P_n}{Q_n}$ *окрестность начала координат состоит из* $2n+2$ *гиперболических секторов.*

Следствие 2. *Пусть для уравнения* (1) *даны картины:* 1) $P=4$, $E=2n-2$, $H=0$; 2) $P=2$, $E=2n-2$, $H=0$; 3) $P=0$, $E=2n-2$, $H=0$. (Такие картины существуют [3]).

Можно подсчитать индекс Пуанкаре (например по картинам). Во всех трех случаях получим: $j=n$. *Тогда для уравнений* $y'=\frac{Q_n}{P_n}$ *и* $y'=-\frac{P_n}{Q_n}$ *во всех трех случаях имеем одну и ту же качественную картину:* $E=P=0$, $H=2n+2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М.—Л., 1949.

2. П. Т. Черевичный, Выражение числа эллиптических и гиперболических областей, примыкающих к особой точке одного дифференциального уравнения, через количество параболических областей и индекс Пуанкаре, Научн. зап. Одесск. политехн. ин-та, т. 34, 1961.

3. П. Т. Черевичный, О расположении интегральных кривых одного дифференциального уравнения в окрестности особой точки высокого порядка, Там же.

Поступила 23.VI 1964 г.

Одесса