1965 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. XVII, № 6
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

О кривизне линий уровня и их ортогональных траекторий в классе функций с ограниченным вращением

Т. Г. Эзрохи

Нахождению точных нижних и верхних оценок кривизны линий уровня и ортогональных траекторий в некоторых подклассах класса S функций

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \qquad z = re^{i\varphi},$$

регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$, посвящены работы Я. С. Мирошниченко, В. А. Зморовича, И. Е. Базилевича, Г. В. Корицкого и И. А. Александрова.

Впервые точную оценку снизу кривизны линий уровня в кольце $2 - \sqrt{3} \leqslant r < 1$ для всего класса S нашел Я. С. Мирошниченко [1].

В. А. Зморовичем [2] были получены точные верхние и нижние оценки кривизны линий уровня в классе S^0 выпуклых функций, а также в классе S_p^0 выпуклых с p-кратной симметрией вращения функций.

Для класса почти выпуклых с p-кратной симметрией вращения функций получены точные верхние и нижние оценки кривизны линий уровня Г. В. Корицким [3], причем установлено, что нижняя оценка достигается звездной функцией с p-кратной симметрией вращения. При $p = 1$ указанный класс совпадает с классом, рассмотренным И. Е. Базилевичем. Таким образом, нижняя оценка кривизны линий уровня для класса S^* звездных функций получена И. Е. Базилевичем, а в классе S_p^* звездных с p-кратной симметрией вращения — Г. В. Корицким.

Г. В. Корицкий [4] доказал, что оценки снизу кривизны линий уровня, найденные Я. С. Мирошниченко в кольце $2 - \sqrt{3} \leqslant r < 1$ для всего класса S и в кольце $\sqrt[p]{p + 1 - \sqrt{p^2 + 2p}} \leqslant r < 1$ для класса S_p функций с p-кратной симметрией вращения, справедливы также во всем единичном круге.

В последнее время И. А. Александровым [5] получена верхняя оценка кривизны линий уровня в классе S_p^*.

Точные оценки кривизны ортогональных траекторий линий уровня в круге $|z| < 1$ получены Г. В. Корицким [3] в классе S_p^0.

В настоящей заметке рассматривается класс $\widetilde{U}_\alpha$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ функций с ограниченным вращением порядка α, определяемый условиями: 1) $\operatorname{Re} f'(z) > \alpha$ в $|z| < 1$, 2) $f'(0) = 1$. Для этого класса устанавливаются точные нижние и верхние оценки кривизны линий уровня, а для класса $\widetilde{U}_0$ — также точные оценки кривизны ортогональных траекторий линий уровня.

1. Теорема 1. *Пусть* $f(z) \in \widetilde{U}_\alpha$. *Тогда имеют место следующие точные оценки для кривизны линий уровня* $\left(h = \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)$

$$K_r \leqslant \frac{1+h}{r(1-r^2)\,[1-r^2+h(1+r^2)]}, \tag{1}$$

если:

1) $0 \leqslant h \leqslant 9$ *и* $r \in (0, 1)$

или

2) $h \geqslant 9$ *и* $r \in (0, r_1] + [r_2, 1)$,

где

$$r_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{H}, \qquad r_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{H}, \qquad H = \frac{h-9}{h-1};$$

$$K_r \leqslant \frac{1+h}{r}\,\frac{1+2r-r^2+h(1-r^2)}{[1+r+h(1-r)]^2}, \tag{2}$$

если $h \geqslant 9$ *и* $r \in [r_1, r_2]$;

$$K_r \geqslant \frac{1+h}{r}\,\frac{h(1-r^2)^2-r^4}{h(1-r^2)[1+r^2+h(1-r^2)]}, \tag{3}$$

если:

1) $h \geqslant \frac{1}{9}$ *и* $r \in (0, 1)$

или

2) $0 \leqslant h \leqslant \frac{1}{9}$ *и* $r \in (0, r_3] + [r_4, 1)$,

где

$$r_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{H_1}, \qquad r_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{H_1}, \qquad H_1 = \frac{1-9h}{1-h};$$

$$K_r \geqslant \frac{1+h}{r}\,\frac{1-2r-r^2+h(1+r)^2}{[1-r+h(1+r)]^2}, \tag{4}$$

если $0 \leqslant h \leqslant \frac{1}{9}$ *и* $r \in [r_3, r_4]$.

Доказательство. Воспользуемся двумя теоремами, принадлежащими В. А. Зморовичу [6]. Через P будем обозначать класс регулярных в круге $|z| < 1$ функций $p(z)$, удовлетворяющих условиям: 1) $\operatorname{Re} p(z) > 0$ в $|z| < 1$, 2) $p(0) = 1$, а через P_2 — подкласс класса P, образованный из функций

$$p_2(z) = \lambda_1 \frac{1+ze^{-i\beta_1}}{1-ze^{-i\beta_1}} + \lambda_2 \frac{1+ze^{-i\beta_2}}{1-ze^{-i\beta_2}}, \tag{5}$$

где $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\beta_1, \beta_2 \in [0, 2\pi]$.

Теорема 2 (В. А. Зморовича). *Пусть* $F(\omega, w)$ — *комплекснозначная функция двух комплексных переменных* $\omega = \sigma + i\tau$ *и* $w = u + iv$. *Предположим, что* $\operatorname{Re} F(\omega, w) \equiv \Phi(\sigma, \tau; u, v)$ — *дифференцируемая функция в области* B:

$$\sigma > 0, \qquad -\infty < \tau < +\infty, \qquad -\infty < u < +\infty, \qquad -\infty < v < +\infty,$$

причем $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2 \neq 0$ в B.

Тогда, полагая $\omega = p(z)$, $w = zp'(z)$, *получаем, что*

$$\max_{p\in P}\max_{|z|=r} \operatorname{Re} F$$

и

$$\min_{p\in P}\min_{|z|=r} \operatorname{Re} F$$

достигаются в подклассе P_2.

Теорема 3 (В. А. Зморовича). *Пусть* $F(\omega, w) = M(\omega) + N(\omega)w$, *где функции* $M(\omega)$ *и* $N(\omega)$ *определены в* $\operatorname{Re}\omega > 0$.

Положим

$$\omega = \lambda_1 \frac{1+z_1}{1-z_1} + \lambda_2 \frac{1+z_2}{1-z_2},$$

$$w = \lambda_1 \frac{2z_1}{(1-z_1)^2} + \lambda_2 \frac{2z_2}{(1-z_2)^2}, \tag{6}$$

где $|z_1| = |z_2| = r$, $0 < r < 1$, $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Тогда справедлива следующая формула:

$$F(\omega, w) = M(\omega) + \frac{1}{2}(\omega^2 - 1)N(\omega) + \frac{1}{2}N(\omega)(\varrho^2 - \varrho_0^2)e^{i(2\beta+\theta)}, \tag{7}$$

где $\omega = a + \varrho_0 e^{i\varphi_0}$, $a = \dfrac{1+r^2}{1-r^2}$, $0 \leqslant \varrho_0 \leqslant \varrho = \dfrac{2r}{1-r^2}$, $\theta = \arg N(\omega)$,

а β *определяется из условия*

$$\omega_k = \frac{1+ze^{-i\beta_k}}{1-ze^{-i\beta_k}} = \omega + t_k e^{i\beta} \qquad (k = 1, 2).$$

Из (7) следует, что, если функция $F(\omega, w)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то нахождение

$$\max_{p_2\in P_2}\max_{|z|=r} \operatorname{Re} F(p(z), zp'(z)), \qquad \min_{p_2\in P_2}\min_{|z|=r} \operatorname{Re} F(p(z), zp'(z))$$

сводится к нахождению

$$\max\left[\operatorname{Re} M^*(\omega) + \frac{1}{2}|N(\omega)|(\varrho^2 - \varrho_0^2)\right]$$

и

$$\min\left[\operatorname{Re} M^*(\omega) - \frac{1}{2}|N(\omega)|(\varrho^2 - \varrho_0^2)\right],$$

где $M^*(\omega) = M(\omega) + \frac{1}{2}(\omega^2 - 1)N(\omega)$, в круге $\varrho_0 = |\omega - a| \leqslant \varrho$.

Для кривизны линий уровня известна формула

$$K_r = \frac{\operatorname{Re}\left(1 + \dfrac{zf''}{f'}\right)}{|z||f'(z)|}. \tag{8}$$

Очевидно, для функций класса $\widetilde{U}_\alpha$

$$f'(z) = \alpha + (1-\alpha)p(z) = \frac{1}{1+h}[p(z) + h],$$

где

$$p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1+ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}}\, d\mu(\theta),$$

а $\mu(\theta)$ — неубывающая функция и $\int_0^{2\pi} d\mu(\theta) = 1$.

Введем обозначения $p(z) = \omega$, $zp'(z) = w$. Тогда формула (8) примет вид

$$K_r = F(\omega, w) = \frac{1+h}{r}\operatorname{Re}\left[\frac{1}{|\omega+h|} + \frac{w}{|\omega+h|(\omega+h)}\right].$$

Функция $F(\omega, w)$ удовлетворяет условию теоремы 2, поэтому

$$\max_{f\in\widetilde{U}_\alpha}\max_{|z|=r} K_r$$

и

$$\min_{f\in\widetilde{U}_\alpha}\min_{|z|=r} K_r$$

достигаются функциями $f(z)$, для которых $f'(z) \in P_2$. На основании же теоремы 3 имеем

$$K_r = \frac{1+h}{r}\left[\frac{1}{|\omega+h|} + \operatorname{Re}\frac{\omega^2 - 1 + (\varrho^2 - \varrho_0^2)e^{2i\beta}}{2|\omega+h|(\omega+h)}\right]$$

или, если ввести обозначение $\omega + h = \mathrm{Re}^{i\psi}$,

$$K_r = \frac{1+h}{r}\left[\frac{1-h}{R} + \frac{1}{2}\cos\psi + \frac{1}{2}\,\frac{(h^2-1)\cos\psi}{R^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varrho^2 - R^2 - (a+h)^2 + 2(a+h)R\cos\psi}{2R^2}\cos(2\beta - \psi)\right]. \tag{9}$$

При фиксированном ω функция (9) принимает наибольшее значение, если $\cos(2\beta - \psi) = 1$, а наименьшее, если $\cos(2\beta - \psi) = -1$.

Таким образом, для нахождения верхней оценки кривизны линий уровня нужно найти наибольшее значение функции

$$L(R, \psi) = \frac{1}{2}(\cos\psi - 1) + \frac{1 - h + (a+h)\cos\psi}{R} +$$

$$+ \frac{(h^2-1)\cos\psi + \varrho^2 - (a+h)^2}{2R^2}$$

в круге $R^2 - 2(a+h)R\cos\psi + (a+h)^2 \leqslant \varrho^2$.

Решая систему

$$\frac{\partial L}{\partial\psi} = -\sin\psi\left(\frac{1}{2} + \frac{a+h}{2} + \frac{h^2-1}{2R^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial R} = \frac{h - 1 - (a+h)\cos\psi}{R^2} - \frac{(h^2-1)\cos\psi + \varrho^2 - (a+h)^2}{R^3} = 0,$$

находим стационарную точку $R = 2\frac{1+ah}{1+a}$, $\psi = 0$.

Если

$$a - \varrho + h < 2\,\frac{1+ah}{1+a} < a + \varrho + h,$$

то нетрудно проверить, что

$$\max K_r = \frac{1+h}{r}\left(\frac{1+a}{R} - \frac{1+ah}{R^2}\right) = \frac{1+h}{z}\,\frac{1}{(1-r^2)[1-r^2+h(1+r^2)]}. \tag{10}$$

Так как в случае максимума $\beta = 0$, $\psi = 0$, то точки $\omega_k = \frac{1 + ze^{-i\beta_k}}{1 - ze^{-i\beta_k}}$ $(k = 1, 2)$ лежат на оси абсцисс, и, следовательно, оценка (10) достигается принадлежащей классу $\widetilde{U}_\alpha$ функцией

$$f(z) = (2\alpha - 1)z + 2(1 - \alpha)\ln\frac{(1 + z)^{\lambda_2}}{(1 - z)^{\lambda_1}}, \tag{11}$$

где

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}[2 - 3r + r^3 + hr(1 - r^2)], \qquad \lambda_2 = \frac{1}{4}[2 + 3r - r^3 - hr(1 - r^2)].$$

Прежде всего отметим, что при любом h выполняется неравенство $2\frac{1 + ah}{1 + a} > a - \varrho + h$. Неравенство же $2\frac{1 + ah}{1 + a} < a + \varrho + h$ выполняется для всех тех h, для которых

$$h \leqslant h_0, \tag{12}$$

где

$$h_0 = \frac{(1 + r)(2 - r)}{r(1 - r)}.$$

Отсюда следует, что при фиксированном $|z| = r$ для всех h, удовлетворяющих неравенству (12), верхняя оценка для кривизны линии уровня определяется формулой (10). Если же

$$h \geqslant h_0, \tag{13}$$

то функция $L(R, 0)$ принимает наибольшее значение при $R = a + \varrho + h$, ибо она возрастает на промежутке $[a - \varrho + h,\ a + \varrho + h]$ при выполнении условия (13), причем тогда

$$\max K_r = \frac{1 + h}{r}\left[\frac{1 + a}{a + \varrho + h} - \frac{1 + ah}{(a + \varrho + h)^2}\right] = \frac{1 + h}{r}\,\frac{1 + 2r - r^2 + h(1 - r)^2}{[1 + r + h(1 - r)]^2}.$$

В силу того, что в рассматриваемом случае в соотношении (5) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, оценка достигается функцией класса $\widetilde{U}_\alpha$:

$$f(z) = (2\alpha - 1)z + 2(1 - \alpha)\ln\frac{1}{1 - z}. \tag{14}$$

Условия (12) и (13) могут быть записаны так:

$$(h - 1)\left(r^2 - r + \frac{2}{h - 1}\right) \geqslant 0, \tag{12*}$$

$$(h - 1)\left(r^2 - r + \frac{2}{h - 1}\right) \leqslant 0. \tag{13*}$$

Легко проверить, что при $0 \leqslant h < 1$ уравнение

$$r^2 - r + \frac{2}{h - 1} = 0 \tag{15}$$

имеет корни $r_1 < 0$, $r_2 > 1$, и, следовательно, для $0 < r < 1$ выполняется неравенство (12*). При $1 < h < 9$ корни уравнения (15) комплексные сопряженные, т. е. снова выполняется неравенство (12*) для всех $0 < r < 1$. Если же $h \geqslant 9$, то корни уравнения (15) удовлетворяют неравенству $0 < r_1 < r_2 < 1$ и в интервалах $(0, r_1]$, $[r_2, 1)$ выполняется условие (12*), а в интервале $[r_1, r_2]$ — условие (13*).

Таким образом, доказана справедливость оценок (1) и (2), причем оценки достигаются соответственно функциями (11) и (14).

Перейдем к установлению нижних оценок (3) и (4). Для нахождения нижней оценки кривизны линий уровня в классе $\widetilde{U}_a$ нужно найти наименьшее значение функции

$$T(R,\psi)=\frac{1+\cos\psi}{2}+\frac{1-h-(a+h)\cos\psi}{R}+\frac{(h^2-1)\cos\psi-\varrho^2+(a+h)^2}{2R^2} \tag{16}$$

в круге $R^2-2(a+h)R\cos\psi+(a+h)^2\leqslant\varrho^2$.

Как и выше, используя соответствующие вычисления, приходим к выводу, что при $h\geqslant\frac{1}{h_0}$ минимум функции (16) достигается в точке $R=\frac{2h(h+a)}{2h+a-1}$, $\psi=0$, причем тогда

$$\min K_r=\frac{1+h}{r}\,\frac{h(1-r^2)^2-r^4}{h(1-r^2)[1+r^2+h(1-r^2)]}.$$

Легко убедиться, что в этом случае $\beta=\frac{\pi}{2}$, $\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}$, т. е. экстремальная функция имеет вид

$$f(z)=\frac{1}{1+h}\int_0^z\left[\frac{1-\zeta^2}{1-2\zeta\cos\theta+\zeta^2}+h\right]d\zeta, \tag{17}$$

где θ определяется из условия

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}+h=\frac{2h(h+a)}{2h+a-1}.$$

Если же $h\leqslant\frac{1}{h_0}$, то минимум функции (16) достигается на окружности $R^2-2(a+h)R\cos\psi+(a+h)^2=\varrho^2$ в точке $R=a-\varrho+h$, $\psi=0$. В этом случае

$$\min K_r=\frac{1+h}{r}\,\frac{1-2r-r^2+h(1+r)^2}{[1-r+h(1+r)]^2},$$

и оценка достигается функцией (14).

Если $h=0$, то теорема 1 принимает более простой вид: *пусть* $f(z)\in\widetilde{U}_0$, *тогда*

$$\frac{1-2r-r^2}{r(1-r)^2}\leqslant K_r\leqslant\frac{1}{r(1-r^2)^2},$$

причем верхняя оценка достигается функцией $f(z)$, *для которой*

$$f'(z)=\frac{2-3r+r^3}{4}\,\frac{1+z}{1-z}+\frac{2+3r-r^3}{4}\,\frac{1-z}{1+z},$$

а нижняя — функцией, для которой

$$f'(z)=\frac{1+z}{1-z}.$$

Из теоремы 1 следует такая теорема.

Теорема 4. *При* $\alpha \geqslant \frac{1}{10}$ *радиус выпуклости класса* $\widetilde{U}_\alpha$ *определяется формулой*

$$r_\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{1-\alpha}}},$$

а при $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{10}$ — *формулой*

$$r_\alpha = \sqrt{\frac{2-2\alpha}{1-2\alpha}} - 1.$$

Экстремальными функциями являются соответственно функции (17) и (14).

Для доказательства достаточно найти корни уравнений

$$h(1-r^2)^2 - r^4 = 0,$$

$$1 - 2r - r^2 + h(1+r)^2 = 0.$$

При $\alpha = 0$ получаем известный результат Г. М. Голузина [8].

2. Пусть дан класс функций $\widetilde{U}_0$. В плоскости z будем рассматривать лучи $\varphi = \varphi_0$ $(0 \leqslant \varphi_0 \leqslant 2\pi)$, ортогональные окружностям $|z| = r$. Тогда кривизна образа луча $\varphi = \varphi_0$ определяется, как известно [7], формулой

$$K_\varphi = \frac{1}{|f'(z)|} \operatorname{Im}\left(e^{i\varphi_0} \frac{f''(z)}{f'(z)}\right)$$

или

$$K_\varphi = \Psi(\omega, w) = \frac{1}{r|\omega|} \operatorname{Im} \frac{w}{\omega},$$

где $\omega = p(z)$, $w = zp'(z)$.

Так как функция $\Psi(\omega, w)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то

$$\max_{f \in \widetilde{U}_0} \max_{|z|=r} K_\varphi$$

и

$$\min_{f \in \widetilde{U}_0} \min_{|z|=r} K_\varphi$$

достигаются функциями $f(z)$, для которых $f'(z) \in P_2$. В силу теоремы 3

$$K_\varphi = \frac{1}{r|\omega|} \operatorname{Im} \frac{\omega^2 - 1 + (\varrho^2 - \varrho_0^2) e^{2i\beta}}{2\omega}.$$

Как и выше, замечаем, что для нахождения наибольшего значения кривизны ортогональных траекторий нужно найти наибольшее значение функции

$$Q(R, \psi) = \frac{1}{2r}\left(1 + \frac{1}{R^2}\right) \sin\psi + \frac{1}{2rR^2}(\varrho^2 - \varrho_0^2)$$

в круге $|\omega - a| \leqslant \varrho$, где $\omega = Re^{i\psi}$.

Решая систему

$$\left(1 + \frac{1}{R^2}\right)\frac{\cos\psi}{2} - \frac{a}{R}\sin\psi = 0,$$

$$\frac{-\sin\psi + 1}{R} - a\cos\psi = 0,$$

приходим к выводу, что функция $Q(R, \psi)$ принимает наибольшее значение на границе, т. е. на окружности $|\omega - a| = \varrho$. Таким образом, нужно найти наибольшее значение функции

$$Q(R, \psi) = \frac{1}{2r}\left(1 + \frac{1}{R^2}\right)\sin\psi \tag{18}$$

при условии, что

$$R^2 - 2aR\cos\psi + 1 = 0.$$

Исключая ψ, получаем функцию

$$Q(R) = \frac{1}{2r}\left(1 + \frac{1}{R^2}\right)\sqrt{1 - \frac{1}{4a^2}\left(R + \frac{1}{R}\right)^2},$$

которую нужно исследовать на интервале $a - \varrho \leqslant R \leqslant a + \varrho$.

При нахождении стационарных точек получаем уравнение

$$3 = t + \frac{8a^2t}{(1+t)^2}, \tag{19}$$

где $R^2 = t$. Нас интересует корень этого уравнения в интервале $((a-\varrho)^2, 1)$, ибо каждому значению ψ $\left(0 \leqslant \psi < \arcsin\frac{\varrho}{a}\right)$ соответствует два значения R, одно из которых меньше 1, а второе больше. Из (18) следует, что функция $Q(R, \psi)$ принимает наибольшее значение при $R < 1$. Но на интервале $((a-\varrho)^2, 1)$ уравнение (19) имеет лишь один корень t_0. Это следует из того, что функция $S(t) = t + \frac{8a^2t}{(1+t)^2}$ возрастает на этом интервале, а $S(1) > 0$ и $S((a-\varrho)^2) < 0$.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Если* $f(z) \in \widetilde{U}_0$, *то*

$$0 \leqslant |K_\varphi| \leqslant \frac{1}{2r}\,\frac{1+t_0}{t_0}\sqrt{\frac{1-t_0}{3-t_0}}, \tag{20}$$

где t_0 — *корень уравнения* (19), *лежащий в интервале* $\left(\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2, 1\right)$.

Границы, устанавливаемые этими неравенствами, точные и достигаются функцией

$$f(z) = -z + 2\ln\frac{1}{1-z},$$

принадлежащей классу $\widetilde{U}_0$.

Замечание. Оценка (20) может быть выражена в параметрической форме:

$$0 \leqslant |K_\varphi| \leqslant \frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3+\sigma^4}{3\sigma^4+1}}\,\frac{3+3\sigma^4-2\sigma^2}{(1-\sigma^4)(1-\sigma^2)},$$

$$r = \sigma\sqrt{\frac{3\sigma^4+1}{3+\sigma^4}} \qquad (0 \leqslant \sigma \leqslant 1).$$

Этот способ удобен тем, что для каждого значения σ из интервала $[0, 1]$ можем указать оценку для соответствующего значения r.

Для доказательства достаточно сделать замену

$$t = \frac{3(1-\sigma^2)^2}{3+2\sigma^2+3\sigma^4}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. С. Мирошниченко, Об одной задаче теории однолистных функций, Учен. зап. Сталинск. пед. ин-та, вып. 1, 1951, 63—75.
2. В. А. Зморович, О некоторых вариационных задачах теории однолистных функций, Укр. матем. ж., т. IV, № 3, 1952, 276—298.
3. Г. В. Корицкий, О кривизне линий уровня и их ортогональные траектории при конформных отображениях, Матем. сб., т. 37 (79): 1, 1955, 103—115.
4. Г. В. Корицкий, К вопросу о кривизне линий уровня при однолистных конформных отображениях, УМН, т. 15, вып. 5 (95), 1960, 179—182.
5. И. А. Александров, Экстремальные свойства звездообразных отображений, Сибирск. матем. ж., № 2, 1963, 241—267.
6. В. А. Зморович, Про деякі теореми теорії екстремальних оцінок в спеціальних класах аналітичних функцій, ДАН УРСР, № 8, 1965.
7. В. А. Зморович, Про границі коливання кривизни образу плоскої кривої при однолистих конформних відображеннях, Доп. АН УССР, № 4, 1959.
8. Г. М. Голузин, К теории однолистных конформных преобразований, Матем. сб., 42, 1935, 169—190.

Поступила 9.VI 1964 г.
Киев