О монотонных отображениях n-мерной сферы на себя

В. П. Компанией

В заметке рассматриваются монотонные отображения n-мерной сферы на себя специального вида. S^n — n-мерная сфера.

Подмножество $F \subset S^n$ называется клеточным, если $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i^n$, где Q_i^n — n-мерная клетка и $Q_i^n \subset \operatorname{Int} Q_{i-1}^n$.

Отображение $f: S^n \to S^n$ называется точечным, если прообраз $f^{-1}(x)$ каждой точки $x \in S^n$ есть клеточное множество, и клеточным, если прообраз $f^{-1}(K)$ любого клеточного множества $K \subset S^n$ клеточен.

Неизвестно при $n \geqslant 3$, совпадают ли эти два класса отображений.

Всякое непрерывное отображение $f: S^n \to S^n$ индуцирует непрерывное разбиение сферы S^n на множества $f^{-1}(x)$, $x \in S^n$, [1].

Назовем невырожденным прообразом отображения f множество $f^{-1}(x)$, имеющее более одной точки.

Отображение $f: M^n \to M^n$, где M^n — топологическое многообразие, называется псевдоизотопным тождественному, если существует гомотопия Φ_t: $: M^n \to M^n$ такая, что Φ_0 — тождественный гомеоморфизм, Φ_t — гомеоморфизм многообразия при $t < 1$, $\Phi_1 = f$.

Известно, что отображение n-сферы на себя с конечным числом невырожденных прообразов и отображения 3-сферы на себя со счетным числом невырожденных прообразов точечны [2, 4].

Ниже приводится несколько простых теорем такого же сорта. Основной результат заметки есть теорема 2 (обобщение теоремы Брауна, см. [2]), в которой содержится утвердительный ответ на вопрос К. В. Квана [4]: будут ли невырожденные прообразы отображения n-сферы на себя, если их счетное число, клеточными множествами? Две теоремы (критерий клеточности Макмиллана, гомотопическая теорема Вьеториса — Смейла), на которые существенно опирается большинство доказательств, для удобства читателя приведены в тексте.

Теорема 1. *Отображение n-сферы ($n \neq 4$) на себя, при котором прообразы точек являются абсолютными ретрактами, точечно.*

Доказательство. Пусть $f: S^n \to S^n$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее условиям теоремы, $G = \{f^{-1}(x) \neq \text{точке},\ x \in S^n\}$, W — произвольная окрестность невырожденного прообраза g, $U = f(W)$, $f(g) = *$. Ввиду непрерывности разбиения, индуцированного отображением f, существует окрестность $U_0 \subset U$ такая, что $f^{-1}(U_0) \subset W$. Ясно, что в качестве U_0 можно всегда взять топологический открытый шар. Воспользуемся следующим критерием клеточности (см. [5], теорема 1): пусть g — компактный абсолютный ретракт во внутренности кусочно-линейного многообразия $M^n (n \geqslant \geqslant 5)$. Тогда для того, чтобы $g = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$, где F_i — кусочно-линейные клетки такие, что $F_i \subset \operatorname{Int} F_{i-1} \subset M$, необходимо и достаточно следующее условие: для каждого открытого множества W, содержащего g, существует открытое множество V такое, что $g \subset V \subset W$ и каждая петля в $V \setminus g$ гомотопна нулю в $W \setminus g$.

Для кусочно-линейных многообразий ($n \neq 4$) понятия кусочно-линейной клеточности множества и клеточности совпадают [5].

Возьмем в качестве окрестности V, упоминаемой в критерии, множество $f^{-1}(U_0)$, открытое ввиду непрерывности отображения f. Пусть $u(t)$ — произвольная петля в $V \setminus g$ (т. е. непрерывное отображение $u: [0, 1] \to V \setminus g$ такое, что $u(0) = u(1)$). Так как U_0 локально n-связно, $f^{-1}(y)$, где $y \in U_0$, абсолютные ретракты и, значит, асферичны и локально асферичны, то мы находимся в условиях гомотопической теоремы Виеториса — Смейла [6]: пусть $f(X) = Y$ — собственное отображение, где X и Y — линейно связные, локально компактные, сепарабельные метрические пространства, X — LC^n, и для каждого $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ — $(n-1)$-связно и LC^{n-1}. Тогда (A) Y также LC^n: (B) индуцированный гомоморфизм $f_{\#}: \pi_r(X) \to \pi_r(Y)$ есть изоморфизм «на» для $0 \leqslant r \leqslant n-1$ и эпиморфизм для $r = n$.

Следовательно, $\pi_1(f^{-1}(U_0 \setminus *)) = \pi_1(U_0 \setminus *) = 0$, и петля $u(t)$ гомотопна нулю в $V \setminus g$. В случае $n = 3$ справедливость утверждения вытекает из теоремы 1′ из [5].

Теорема 2. *Отображения n-сферы ($n \neq 4$) на себя со счетным числом невырожденных прообразов, клеточны.*

Доказательство. Пусть $f: S^n \to S^n$ — отображение, удовлетворяющее условиям теоремы, G — совокупность невырожденных прообразов, $f(G) = A$. Сначала докажем, что отображение f точечно.

Существует [9] изотопия $\Phi_t: S^n \setminus a \to S^n \setminus a$, где a — некоторая точка такая, что $f^{-1}(a) \not\subset G$, переводящая A во множество точек с рациональными координатами при какой-нибудь параметризации $S^n \setminus a$. Покроем A взаимно непересекающимися кубами I_j^n, $j \in J$, каждая точка на границах которых имеет хотя бы одну иррациональную координату, и такими, что для произвольного $\varepsilon > 0$ лишь конечное число из них имеют диаметр больший ε.

Согласно теореме 3 из [3], фактор-пространство разбиения $S^n \setminus a$, состоящего из точек $x \in S^n \setminus a \setminus \bigcup_j I_j^n$ и кубов $I_j^n (j \in J)$ гомеоморфно $S^n \setminus a$. Индуцированное этим разбиением отображение $\varphi': S^n \setminus a \to S^n \setminus a$ доопределим до отображения $\varphi: S^n \to S^n$, положив $\varphi(a) = a$. Непрерывность в точке a легко проверяется. Множества $f^{-1}(BdI_j^n)$ $(j \in J)$ являются взаимно непересекающимися топологически вложенными в S^n $(n-1)$-мерными сферами S_j^{n-1}. Согласно теореме 4 из [8], множества $S_j^{n-1} \cup \operatorname{Int} S_j^{n-1}$, где под $\operatorname{Int} S_j^{n-1}$ понимаем ограниченную компоненту множества $S^n \setminus a \setminus S_j^{n-1}$, суть абсолютные ретракты. Эти же абсолютные ретракты являются невырожденными прообразами отображения $\varphi \cdot f: S^n \to S^n$. Следовательно, по теореме 1, множества $S_j^{n-1} \cup \operatorname{Int} S_j^{n-1}$ необходимо клеточны.

Далее, пусть $g \in G$, $f(g) = *$ и $\varphi(*) \in \operatorname{Int} I^n$, где $I^n \subset \{I_j^n, j \in J\}$. Нетрудно видеть, что можно указать такую последовательность $I_k^n (k = 1, 2, \ldots)$, что

$$* = \bigcap_k I_k^n, \quad I_k^n \subset \operatorname{Int} I_{k-1}^n \quad \text{и} \quad f^{-1} \cdot \varphi^{-1}(BdI_k^n) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

есть топологическое вложение в S^n сферы S_k^{n-1} $(k = 1, 2, \ldots)$. Тогда

$\bigcap\limits_k (S_k^{n-1} \cup \operatorname{Int} S_k^{n-1}) = g$ и, следовательно, множество g может быть представлено в виде пересечения $\bigcap\limits_i F_i$ убывающей последовательности $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ клеточных множеств F_i.

Пусть W — произвольная окрестность множества g. Существуют такие i_0 и открытое множество V, что $F_i \subset V \subset W$ для $i > i_0$. Так как F_i — клеточное множество, то существует клетка Q^n такая, что $g \subset Q^n \subset V \subset W$. Следовательно, g — клеточное множество и f — точечное отображение.

Пусть теперь K — клеточное множество n-сферы S^n. Существует отображение $\varphi : S^n \to S^n$ с единственным невырожденным прообразом K и множество $f^{-1}(K)$ становится прообразом точки для отображения $\varphi \cdot f : S^n \to S^n$. Отображение $\varphi \cdot f : S^n \to S^n$ удовлетворяет условиям теоремы и, следовательно, $f^{-1}(K)$ — клеточное множество. Теорема доказана.

Теорема 3. *Отображение $f : S^n \to S^n$, псевдоизотопное тождественному, клеточно.*

Доказательство. Пусть $K = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} Q_i^n$ — клеточное множество. $F = f^{-1}(K)$, $f = \lim\limits_{t \to 1} \Phi_t$, где Φ_t — гомеоморфизмы при $t < 1$. Покажем, что существует такая последовательность $\{\Phi_{t_i}\}_{i=1}^{\infty}$, что $\Phi_{t_i}(F) \subset Q_i^n$ и

$$\Phi_{t_i}^{-1}(Q_i^n) \subset \operatorname{Int} \Phi_{t_{i-1}}^{-1}(Q_{i-1}^n), \qquad t_i \to 1.$$

Так как $K = \operatorname{lt}\limits_{t \to 1} \Phi_t(F)$, то существует t_1 такое, что

$$\Phi_{t_1}(F) \subset \operatorname{Int} Q_1^n.$$

$\Phi_{t_1}^{-1}(Q_1^n)$ — топологическая клетка, содержащая F в своей внутренности. Докажем существование такого t_2, что

$$F \subset \operatorname{Int} \Phi_{t_2}^{-1}(Q_2^n) \subset \Phi_{t_2}^{-1}(Q_2^n) \subset \operatorname{Int} \Phi_{t_1}^{-1}(Q_1^n).$$

Допустим, что не существует такого $t_2 > t_1$. Выберем для каждой клетки Q_i^n гомеоморфизм Φ_{t_i} такой, что $t_i \to 1$ и

$$\Phi_{t_i}(F) \subset \operatorname{Int} Q_i^n.$$

По допущению существуют точки $a_i \in \Phi_{t_i}^{-1}(Q_i^n)$ и $a_i \notin \operatorname{Int} \Phi_{t_1}^{-1}(Q_1^n)$. Последовательность $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ всех таких точек имеет хотя бы одну предельную точку a. Можно предположить, что $\lim\limits_{i \to \infty} a_i = a$. Так как $\Phi_{t_i}(a_i) \subset Q_i^n$ и, следовательно, $\lim \Phi_{t_i}(a_i) \subset \bigcap\limits_i Q_i^n = K$, то $f(a) = \lim\limits_{i=\infty} \Phi_{t_i}(a_i) \subset K$, что невозможно в силу непрерывности функции f. Продолжая это рассуждение по индукции, получим последовательность клеток $\{\Phi_{t_i}^{-1}(Q_i^n)\}_{i=1}^{\infty}$ таких, что $\Phi_{t_i}^{-1}(Q_i^n) \subset \operatorname{Int} \times \Phi_{t_{i-1}}^{-1}(Q_{i-1}^n)$. Нетрудно видеть, что $F = \bigcap\limits_i \Phi_{t_i}^{-1}(Q_i^n)$: включение $F \subset \bigcap \Phi_{t_i}^{-1}(Q_i^n)$ очевидно; обратное включение следует из того, что для произвольной точки $x \in \bigcap\limits_i \Phi_{t_i}^{-1}(Q_i^n)$ $\lim\limits_{t_i \to 1} \Phi_{t_i}(x) \in K$. Следовательно, F — клеточное множество.

Следствие. *Отображение n-сферы на себя, невырожденные прообразы которого в фактор-пространстве образуют нульмерный ручной компакт, клеточно.*

Доказательство. В силу теоремы 3 достаточно показать, что отображение $f : S^n \to S^n$, удовлетворяющее условиям следствия, псевдоизотопно тождественному. Так как нульмерный компакт C ручной, то существует последовательность покрытий клетками

$$\alpha_\nu = \{Ш_i^\nu\}_{i=1}^{n_\nu}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \qquad n_\nu < n_{\nu+1},$$

компакта C такая, что для каждых i, ν найдется k такое, что

$$Ш_i^{\nu+1} \subset \operatorname{Int} Ш_k^\nu, \;\; Ш_p^\nu \cap Ш_q^\nu = 0, \quad p, q = 1, 2, \ldots, n_\nu, \;\; \operatorname{diam} Ш_i^\nu \underset{i\to\infty}{\to} 0.$$

Тогда $f^{-1}(\partial Ш_i^\nu)$ ($i = 1, 2, \ldots, n_\nu$; $\nu = 1, 2, \ldots$) есть $(n-1)$-мерная сфера, нормально вложенная в S^n. Следовательно, $f^{-1}(Ш_i^\nu)$ — клетка и $f^{-1}(C)$—клеточно разделенный компакт.

В [3] показано, что такие отображения псевдоизотопны тождественному, а значит, и клеточны (по теореме 3).

В заключение укажем одно направление, в котором, возможно, теоремы такого сорта могут быть полезны.

Хорошо известна проблема отыскания условий, при которых пространство разбиения n-сферы гомеоморфно ей же.

Доказанные теоремы относятся к обратной задаче и дают некоторое представление о том, как должны быть устроены непрерывные разбиения, пространства которых гомеоморфны исходным пространствам.

Более точно, пусть X — компактное метрическое пространство, g — континуум из X. Систему множеств $\{F_i\} \subset X$ назовем нейтрализующей множество g в X, если фактор-пространство G, невырожденными элементами которого являются g и множества F_i, гомеоморфно пространству X.

Примеры. 1) Нейтрализующей клеточного множества в S^n являются пустое множество, любая дизъюнктная конечная система клеточных множеств (см. [2]).

2) Нейтрализующей окружности S^1 в E^3 может быть континуум восьмерок, зацепленных как показал Бинг в [7].

3) Не клеточное множество в E^3 не может быть нейтрализовано никаким счетным числом множеств (см. [4]).

В этих терминах теоремы 1 и 2 могут быть переформулированы так:

Теорема 1. *Не клеточный абсолютный ретракт в $S^n (n \neq 4)$ не может быть нейтрализован никаким множеством абсолютных ретрактов.*

Теорема 2. *Не клеточное множество в $S^n (n \neq 4)$ не может быть нейтрализовано никаким счетным числом множеств.*

Нужно упомянуть еще о теореме Бинга (см. [7]) (доказательство не опубликовано), утверждающей, что в E^3 произвольное конечное множество континуумов может быть нейтрализовано.

Автор благодарен Л. В. Келдыш и А. В. Чернавскому за полезные указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Александров, Комбинаторная топология, 1947, 43.
2. М. Браун, Доказательство обобщенной теоремы Шенфлиса, Математика 5 : 5, 1961, 14.
3. Л. В. Келдыш, Некоторые теоремы о топологическом вложении, Proc. Symp. General Topology, 1961, Prague, 230—234.
4. K. W. Kwun, Upper semicontinuous decomposition of S^n, Proc. Amer. Math. Soc., v. 13, № 2, 1962, 284—290.
5. D. R. McMillan, A criterion for cellularity in manifolds Ann. Math., v. 79, № 2, 1964, 327—337.
6. St. Smale, A Vietoris mapping theorem for homotopy, Proc. Amer. Math. Soc., v. 8, № 3, 1957, 604—610.
7. R. H. Bing, Decomposition of E^3, Topology of 3-manifolds and related topics, 1962, 5—21.
8. R. H. Bing, Retration onto spheres, Amer. Math. Monthly, v. 71, 1964, 481—484.
9. В. Гуревич и Г. Волмэн, Теория размерности, ИЛ, 1947, 70.

Поступила 16.IX 1965 г.
Киев