О некоторых неравенствах

Г. Р. Белицкий

Ряд известных неравенств, начало которым положил Карлеман, приводит к следующему общему вопросу.

Каким условиям должны удовлетворять две бесконечные треугольные матрицы $P = \| p_{kn} \|_{k \leqslant n=1}^{\infty}$ и $Q = \| q_{kn} \|_{k \leqslant n=1}^{\infty}$ $(q_{nn} \neq 0, n = 1, 2, \ldots)$, чтобы существовали коэффициенты $b_n > 0$, $d_n > 0$, зависящие только от матриц P и Q такие, что при всех $a_n > 0$:

$$\sum d_n (a_1^{p_{1n}} \ldots a_n^{p_{nn}}) \leqslant \sum b_n (a_1^{q_{1n}} \ldots a_n^{q_{nn}}).$$

Условимся писать $P < Q$, если ответ на поставленный вопрос для матриц P и Q положителен.

Теорема. *$P < Q$ в том и только в том случае, когда*

$$\text{а) } \lambda_{kn} = \frac{1}{q_{kk} \ldots q_{nn}} \begin{vmatrix} p_{kn} & q_{kk+1} & \ldots q_{kn} \\ p_{k+1n} & q_{k+1k+1} & \ldots q_{k+1n} \\ p_{k+2n} & 0 & \ldots q_{k+2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{nn} & 0 & \ldots q_{nn} \end{vmatrix} \geqslant 0$$

при всех k и n;

$$\text{б) } \sigma_n \equiv \sum_{k=1}^{n} \lambda_{kn} = 1 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Если эти условия выполнены, то при любых $a_n > 0$ имеет место неравенство

$$\sum \frac{\beta_{n+1} - \beta_n}{\beta_{n+1}\beta_n \lambda_{1n}^{\lambda_{1n}} \ldots \lambda_{nn}^{\lambda_{nn}}} (a_1^{p_{1n}} \ldots a_n^{p_{nn}}) \leqslant \sum \frac{1}{\beta_n} (a_1^{q_{1n}} \ldots a_n^{q_{nn}}),$$

где β_n — произвольная возрастающая $k + \infty$ последовательность положительных чисел (мы считаем, что $\lambda_{jn}^{\lambda_{jn}} = 1$, если $\lambda_{jn} = 0$).

Доказательство. Необходимость а). Заметим прежде всего, что

$$p_{jn} = \sum_{k=1}^{n} q_{jk} \lambda_{kn} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n;\; n = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому, если $P < Q$, то, полагая

$$a_1^{q_{1n}} \ldots a_n^{q_{nn}} = c_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

получим

$$\sum d_n (c_1^{\lambda_{1n}} \ldots c_n^{\lambda_{nn}}) \leqslant \sum b_n c_n, \tag{1}$$

причем здесь $c_n > 0$ произвольны, так как $q_{nn} \neq 0$ при всех n.

Допустим теперь, что $\lambda_{j'n'} < 0$. Полагая в (1)

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_{j'-1} = 1, \qquad c_{j'} = \varepsilon > 0, \qquad c_{j'+1} = \ldots = c_{n'} = 1,$$
$$c_k = \frac{1}{k^2 b_k} \qquad (k > p'),$$

получим

$$d_{n'} \varepsilon^{\lambda_{j'n'}} < \sum d_n (c_1^{\lambda_{1n}} \ldots c_n^{\lambda_{nn}}) \leqslant \sum b_n c_n < \sum_{n=1}^{n'} b_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \varepsilon b_{j'},$$

что абсурдно при достаточно малых ε.

Теперь докажем необходимость условия б).

Допустим, что $\sigma_{n'} > 1$. Полагая в (1)

$$c_n = M > 0 \qquad (n \leqslant n'), \qquad c_n = \frac{1}{n^2 b_n} \qquad (n > n'),$$

получим

$$d_{n'} M^{\sigma_{n'}} \leqslant M \sum_{n=1}^{n'} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

что абсурдно при достаточно больших M. Допустим теперь, что $\sigma_{n'} < 1$. Тогда, полагая в (1)

$$a_n = \varepsilon > 0 \qquad (n \leqslant n'), \qquad a_n = \frac{\varepsilon}{n^2 b_n} \qquad (n > n'),$$

получим

$$\varepsilon^{\sigma_{n'}} d_{n'} < \varepsilon \left(\sum_{n=1}^{n'} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right),$$

что абсурдно при достаточно малых ε.

Итак, необходимость условий а), б) доказана.

Достаточность. Для доказательства достаточности условий а) и б) воспользуемся методом Полиа [1].

Пусть $\lambda_{kn} \geqslant 0$, $\sigma_n = 1$ при всех k и n. Тогда при любых $d_n > 0$, $c_n > 0$, $\varphi_{mn} > 0$, в силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\sum d_n (c_1^{\lambda_{1n}} \ldots c_n^{\lambda_{nn}}) = \sum d_n \frac{c_1^{\lambda_{1n}} \ldots c_n^{\lambda_{nn}}}{\varphi_{1n}^{\lambda_{1n}} \ldots \varphi_{nn}^{\lambda_{nn}}} \varphi_{1n}^{\lambda_{1n}} \ldots \varphi_{nn}^{\lambda_{nn}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{\varphi_{1n}^{\lambda_{1n}} \ldots \varphi_{nn}^{\lambda_{nn}}} \sum_{m=1}^{n} \lambda_{mn} \varphi_{mn} c_m = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sum_{n=m}^{\infty} \frac{d_n \lambda_{mn} \varphi_{mn}}{\varphi_{1n}^{\lambda_{1n}} \ldots \varphi_{nn}^{\lambda_{nn}}}. \qquad (2)$$

Пусть β_n — возрастающая к $+\infty$ последовательность положительных чисел. Положим

$$\varphi_{mn} = \begin{cases} \dfrac{\gamma_m}{\lambda_{mn} d_n}, & \lambda_{mn} \neq 0, \\ 1, & \lambda_{mn} = 0, \end{cases}$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ положительны и таковы, что

$$\varphi_{1n}^{\lambda_{1n}} \ldots \varphi_{nn}^{\lambda_{nn}} = \frac{\beta_{n+1} \beta_n}{\beta_{n+1} - \beta_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

т. е.

$$\gamma_1^{\lambda_{1n}} \ldots \gamma_n^{\lambda_{nn}} = \frac{\beta_{n+1} \beta_n}{\beta_{n+1} - \beta_n} \lambda_{1n}^{\lambda_{1n}} \ldots \lambda_{nn}^{\lambda_{nn}} d_n. \qquad (3)$$

Система (3) разрешима при любой правой части, если $\lambda_{nn} \neq 0$ при всех n. Если же некоторые из чисел λ_{nn} равны 0, то соотношения (3) будут выполнены, например, при

$$d_n = \frac{\beta_{n+1} - \beta_n}{\beta_{n+1} \beta_n \lambda_{1n}^{\lambda_{1n}} \ldots \lambda_{nn}^{\lambda_{nn}}}, \qquad \gamma_n = 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

В результате такого выбора чисел φ_{mn} из (2) получаем.

$$\sum d_n (c_1^{\lambda_{1n}} \ldots c_n^{\lambda_{nn}}) \leqslant \sum \frac{\gamma_n}{\beta_n} c_n.$$

Полагая здесь $c_k = a_1^{q_{1k}} \ldots a_k^{q_{kk}}$, получим:

$$\sum d_n (a_1^{p_{1n}} \ldots a_n^{p_{nn}}) \leqslant \sum \frac{\gamma_n}{\beta_n} (a_1^{q_{1n}} \ldots a_n^{q_{nn}}). \tag{4}$$

Далее, из (3) находим:

$$d_n = \frac{(\beta_{n+1} - \beta_n)\, \gamma_1^{\lambda_{1n}} \ldots \gamma_n^{\lambda_{nn}}}{\beta_{n+1}\beta_n \lambda_{1n}^{\lambda_{1n}} \ldots \lambda_{nn}^{\lambda_{nn}}}.$$

Подставляя эти значения в (4) и заменяя γ_k на $\gamma_1^{q_{1k}} \ldots \gamma_k^{q_{kk}}$, получим:

$$\sum \frac{\beta_{n+1} - \beta_n}{\beta_{n+1}\beta_n \lambda_{1n}^{\lambda_{1n}} \ldots \lambda_{nn}^{\lambda_{nn}}} (\gamma_1 a_1)^{p_{1n}} \ldots (\gamma_n a_n)^{p_{nn}} \leqslant \sum \frac{1}{\beta_n} (\gamma_1 a_1)^{q_{1n}} \ldots (\gamma_n a\ )^{q_{nn}}.$$

Заменяя в этом неравенстве $\gamma_k a_k$ на a_k, получим:

$$\sum \frac{\beta_{n+1} - \beta_n}{\beta_{n+1}\beta_n \lambda_{1n}^{\lambda_{1n}} \ldots \lambda_{nn}^{\lambda_{nn}}} (a_1^{l_{1n}} \ldots a_n^{l_{nn}}) \leqslant \sum \frac{1}{\beta_n} (a_1^{q_{1n}} \ldots a_n^{q_{nn}}). \tag{5}$$

Теорема доказана.

Неравенства (4) и (5) эквивалентны, однако для получения некоторых конкретных неравенств то или иное из них оказывается более удобным.

Следствие. *Если элементы матрицы Q зависят только от одного индекса: $q_{jk} = q_k \neq 0$, то $P < Q$ тогда и только тогда, когда*

$$p_{1n} = q_1 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

и при всяком фиксированном n последовательность

$$\mu_{kn} = \frac{p_{kn}}{q_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

не возрастает по k.

Рассмотрим некоторые примеры.

1. Полагая в (3) $p_{jn} = \frac{1}{n}$, $q_{jn} = \delta_{jn}$, $d_n = 1$, $\beta_n = n$, получим $\gamma_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$ и (4) дает известное неравенство Карлемана:

$$\sum (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n} \leqslant l \sum a_n.$$

2. При $p_{jn} = \frac{p_j}{\sigma_n}$, $q_{jn} = \delta_{jn}$, $d_n = 1$, $\beta_n = \sigma_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ неравенство (4) переходит в неравенство Ван-дер-Корнута:

$$\sum (a_1^{p_1} \ldots a_n^{p_n})^{1/\sigma_n} \leqslant \sum \left(\frac{\sigma_{n+1} p_n}{\sigma_n p_{n+1}}\right)^{\sigma_n/p_n} a_n.$$

3. Положим $p_{kn} = 2\frac{n-k+1}{n(n+1)}$, $q_{kn} = \frac{1}{n}$, $\beta_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $d_n = 1$. Тогда из (3) находим, что $\gamma_n < \sqrt{l}\beta_n$, поэтому имеет место неравенство

$$\sum (a_1^n a_2^{n-1} \ldots a_n)^{2/n(n+1)} \leqslant \sqrt{l} \sum (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n}.$$

4. Пусть $\sigma_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. Положим

$$p_{kn} = \frac{1}{k\sigma_n}, \qquad q_{kn} = \frac{1}{n}, \qquad \beta_n = \sigma_n, \qquad d_n = \frac{1}{(n+1)\,\sigma_{n+1}}.$$

Из (3) находим: $\gamma_n < \frac{l}{n}$, поэтому (4) дает

$$\sum \frac{\left(a_1 a_2^{\frac{1}{2}} \ldots a_n^{\frac{1}{n}}\right)^{1/\sigma_n}}{(n+1)\,\sigma_{n+1}} \leqslant l \sum \frac{(a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n}}{n\sigma_n}.$$

5. Положим, наконец, в (5)

$$p_{11} = 1, \qquad p_{kn} = \frac{n-k}{n-1} k \qquad (n > 1), \qquad q_{kn} = k.$$

Тогда $\lambda_{11} = 1$, $\lambda_{kn} = \frac{1}{n-1}$ при $k \leqslant n-1$, $\lambda_{nn} = 0$ $(n > 1)$, поэтому имеет место неравенство

$$\frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2\beta_1} a_1 + \sum \frac{\beta_{n+1} - \beta_n}{\beta_{n+1}\beta_n} (n-1) \left(a_1^{n-1} a_2^{2(n-2)} \ldots a_{n-1}^{n-1}\right)^{1/n-1} \leqslant$$

$$\leqslant \sum \frac{1}{\beta_n} (a_1 a_2^2 \ldots a_n^n),$$

где β_n — произвольная возрастающая к $+\infty$ последовательность положительных чисел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Г. Харди, Д. Е. Литтлвуд и Г. Полиа, Неравенства, ИЛ, 1948.

Поступила 12.VI 1964 г.
Харьков