Особые точки систем уравнений в полных дифференциалах

В. Г. Егоров

Пусть дана система

$$dx = Ax\,du + Bx\,dv + P(u, x)\,du + Q(v, x)\,dv, \tag{1}$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad P(u; x) = \begin{pmatrix} P_1(u, x, y, z) \\ P_2(u, x, y, z) \\ P_3(u, x, y, z) \end{pmatrix}, \qquad Q(v, x) = \begin{pmatrix} Q_1(v, x, y, z) \\ Q_2(v, x, y, z) \\ Q_3(v, x, y, z) \end{pmatrix},$$

а через A и B обозначены квадратные (постоянные) матрицы коэффициентов системы первого приближения.

Относительно правой части уравнения (1) будем предполагать, что она определена и непрерывна в области H:

$$-\infty < u, v < +\infty, \qquad |x| \leqslant h,$$

удовлетворяет в этой области условию интегрируемости

$$AQ + \frac{\partial P}{\partial x} Bx + \frac{\partial P}{\partial x} Q = BP + \frac{\partial Q}{\partial x} Ax + \frac{\partial Q}{\partial x} P, \tag{2}$$

причем $P(u, 0) = 0$, $Q(v, 0) = 0$, а матрицы A и B неособенные и перестановочные.

Рассмотрим вопрос о поведении решений уравнения (1) в достаточно малой окрестности начала координат.

Известно [1], что такая задача решалась для стационарного случая, когда нелинейные добавки суть ряды, младшие члены которых имеют степень $\geqslant 2$.

Пусть $Y = e^{A(u-u_0)+B(v-v_0)}$ — нормализованная интегральная матрица первого приближения уравнения (1). С помощью замены $x = Yz$, учитывая (2), легко находим

$$x(u, v) = e^{A(u-u_0)+B(v-v_0)} \cdot x_0 + \int_{u_0}^{u} e^{A(u-\bar{u})+B(v-v_0)} \cdot P(\bar{u}, x)\, d\bar{u} + \int_{v_0}^{v} e^{B(v-\bar{v})} \cdot Q(\bar{v}, x)\, d\bar{v}, \tag{3}$$

где x_0 — матрица (столбец) начальных условий.

Будем решать это уравнение методом последовательных приближений в предположении, что матрицы $P(u, x)$, $Q(v, x)$ удовлетворяют условию [2, стр. 261].

$$\frac{\partial P}{\partial x} \to 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} \to 0 \tag{4}$$

равномерно относительно u и v, когда $x \to 0$.

Рассмотрим сначала случай, когда собственные значения матриц A и B обладают свойством*

$$\operatorname{Re}(\lambda^{(a)}) < 0, \qquad \operatorname{Re}(\lambda^{(b)}) < 0. \tag{5}$$

Примем в качестве «нулевого» приближения уравнения (3)

$$x^{(0)} = e^{A(u-u_0)+B(v-v_0)} x_0,$$

и далее по индукции

$$x^{(1)} = e^{A(u-u_0)+B(v-v_0)} \cdot x_0 + \int_{u_0}^{u} e^{A(u-\bar{u})+B(v-v_0)} \cdot P(\bar{u}, x^{(0)})\, d\bar{u} + \int_{v_0}^{v} e^{B(v-\bar{v})} \cdot Q(\bar{v}, x^{(0)})\, d\bar{v}$$

. . . . ,

$$x^{(n+1)} = e^{A(u-u_0)+B(v-v_0)} \cdot x_0 + \int_{u_0}^{u} e^{A(u-\bar{u})+B(v-v_0)} P(\bar{u}, x^{(n)})\, d\bar{u} +$$

$$+ \int_{v_0}^{v} e^{B(v-\bar{v})} \cdot Q(\bar{v}, x^{(n)})\, d\bar{v}$$

. . . .

* С известными изменениями все последующие рассуждения применимы и тогда, когда

$$\operatorname{Re}(\lambda^{(a)}) > 0, \quad \operatorname{Re}(\lambda^{(b)}) > 0; \quad \operatorname{Re}(\lambda^{(a)}) < 0, \quad \operatorname{Re}(\lambda^{(b)}) > 0;$$

$$\operatorname{Re}(\lambda^{(a)}) > 0, \quad \operatorname{Re}(\lambda^{(b)}) < 0.$$

Все эти приближения находятся в некоторой окрестности H_m начала координат при $u \geqslant u_0$, $v \geqslant v_0$.

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ — малое число, удовлетворяющее условию $\frac{\varepsilon}{2} L \leqslant \frac{1}{2}$, где

$$L = \sup_{\substack{u \geqslant u_0 \\ v \geqslant v_0}} \left(\int_{u_0}^{u} | e^{A(u-\bar{u})+B(v-v_0)} | \, d\bar{u} + \int_{v_0}^{v} | e^{B(v-\bar{v})} | \, d\bar{v} \right).$$

Подберем по этому числу ε такое число $m > 0$, чтобы при $|x| \leqslant m$ имели место неравенства

$$|P(u, x)| < \frac{\varepsilon}{2} m, \qquad |Q(v, x)| < \frac{\varepsilon}{2} m$$

для всех $u \geqslant u_0$, $v \geqslant v_0$. В силу условия (4) это возможно.

Имеем

$$|x^{(0)}| = |e^{A(u-u_0)+B(v-v_0)}| \, |x_0| = |e^{A(u-u_0)}| \, |e^{B(v-v_0)}| \, |x_0|.$$

Учитывая (5), выберем так $|x_0|$, чтобы при $u \geqslant u_0$ и $v \geqslant v_0$ имело место неравенство

$$|x^{(0)}| \leqslant \frac{m}{2}.$$

Далее. при $u \geqslant u_0$, $v \geqslant v_0$ находим

$$|x^{(1)}| \leqslant |e^{A(u-u_0)+B(v-v_0)}| \, |x_0| + \int_{u_0}^{u} |e^{A(u-\bar{u})+B(v-v_0)}| \, |P(\bar{u}, x^{(0)})| \, d\bar{u} +$$

$$+ \int_{v_0}^{v} |e^{B(v-\bar{v})}| \, |Q(\bar{v}, x^{(0)})| \, d\bar{v} \leqslant \frac{m}{2} + \frac{\varepsilon m}{2} \left(\int_{u_0}^{u} |e^{A(u-\bar{u})+B(v-v_0)}| \, d\bar{u} + \right.$$

$$\left. + \int_{v_0}^{v} |e^{B(v-\bar{v})}| \, d\bar{v} \right) \leqslant \frac{m}{2} + \frac{\varepsilon m}{2} L \leqslant m.$$

Пусть n-е приближение принадлежит области H_m начала координат. Для $(n+1)$ приближения $x^{(n+1)}$ при $u \geqslant u_0$, $v \geqslant v_0$ имеем

$$|x^{(n+1)}| \leqslant |e^{A(u-u_0)+B(v-v_0)}| \, |x_0| + \int_{u_0}^{u} |e^{A(u-\bar{u})+B(v-v_0)}| \, |P(\bar{u}, x^{(n)})| \, d\bar{u} +$$

$$+ \int_{v_0} |e^{B(v-\bar{v})}| \, |Q(\bar{v}, x^{(n)})| \, d\bar{v} \leqslant \frac{m}{2} + \frac{\varepsilon m}{2} \left(\int_{u_0}^{u} |e^{A(u-\bar{u})+B(v-v_0)}| \, d\bar{u} + \right.$$

$$\left. + \int_{v_0}^{v} |e^{B(v-\bar{v})}| \, d\bar{v} \right) \leqslant \frac{m}{2} + \frac{\varepsilon m}{2} L \leqslant m.$$

Таким образом, все последовательные приближения при $u \geqslant u_0$, $v \geqslant v_0$ принадлежат области H_m.

Последовательность

$$x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)} \ldots \tag{6}$$

равномерно сходится при $u \geqslant u_0$, $v \geqslant v_0$, так как соответствующий ей ряд мажорируется сходящимся рядом $\left(\varepsilon L \leqslant \frac{1}{2}\right)$

$$\frac{m}{2} + \frac{m}{2}\varepsilon L + \ldots + \frac{m}{2}(\varepsilon L)^{n+1} + \ldots$$

Действительно, при $u \geqslant u_0$, $v \geqslant v_0$ имеем

$$|x^{(0)}| \leqslant \frac{m}{2},$$

$$|x^{(1)} - x^{(0)}| \leqslant \int_{u_0}^{u} |e^{A(u-\bar{u})+B(v-v_0)}|\,|P(\bar{u}, x^{(0)})|\,d\bar{u} + \int_{v_0}^{v} |e^{B(v-\bar{v})}|\,|Q(\bar{v}, x^{(0)})|\,d\bar{v} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\max|x^{(0)}|L + \frac{\varepsilon}{2}\max|x^{(0)}|L \leqslant \frac{m}{2}\varepsilon L;$$

$$|x^{(2)} - x^{(1)}| \leqslant \int_{u_0}^{u} |e^{A(u-\bar{u})+B(v-v_0)}|\,(|P(\bar{u}, x^{(1)}) - P(\bar{u}, x^{(0)})|)\,d\bar{u} +$$
$$+ \int_{v_0}^{v} |e^{B(v-\bar{v})}|\,(|Q(\bar{v}, x^{(1)}) - Q(\bar{v}, x^{(0)})|)\,d\bar{v} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\max|x^{(1)} - x^{(0)}|L + \frac{\varepsilon}{2}\max|x^{(1)} - x^{(0)}|L \leqslant \frac{m}{2}(\varepsilon L)^2,$$

. . . .

Пусть $x(u, v)$ — предел последовательности (6). Легко видеть, что $x(u, v)$, с учетом (2), удовлетворяет уравнению (1).

Установим, что решение $x(u, v)$, принадлежащее окрестности H_m обладает свойством

$$\lim_{u,v\to+\infty} x(u, v) = 0, \tag{7}$$

а также

$$\lim_{u\to+\infty} x(u, C_v) = 0, \qquad \lim_{v\to+\infty} x(C_u, v) = 0, \tag{8}$$

при всяком выборе постоянных $C_v \geqslant v_0$, $C_u \geqslant u_0$.

Действительно, в силу (5) всегда можно указать такие числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$, что

$$\lim_{u,v\to+\infty} (e^{A(u-u_0)+B(v-v_0)}x_0)\, e^{\alpha(u-u_0)+\beta(v-v_0)} = 0;$$

отсюда

$$|e^{A(u-u_0)+B(v-v_0)}|\,|x_0| \leqslant \frac{M}{2}e^{-\alpha(u-u_0)-\beta(v-v_0)}.$$

Значит,

$$|x^{(0)}| \leqslant \frac{M}{2}e^{-\alpha(u-u_0)-\beta(v-v_0)},$$

где M — постоянная.

Далее,

$$|x^{(1)}| \leqslant \frac{M}{2}e^{-\alpha(u-u_0)-\beta(v-v_0)} + \frac{\varepsilon}{2}L\max|x^{(0)}| + \frac{\varepsilon}{2}L\max|x^{(0)}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{2}e^{-\alpha(u-u_0)-\beta(v-v_0)} + \varepsilon L\max|x^{(0)}| \leqslant \frac{M}{2}(1 + \varepsilon L)e^{-\alpha(u-u_0)-\beta(v-v_0)} \leqslant$$

$$\leqslant Me^{-\alpha(u-u_0)-\beta(v-v_0)}.$$

Пусть

$$|x^{(n)}| \leqslant Me^{-\alpha(u-u_0)-\beta(v-v_0)}.$$

Тогда

$$|x^{(n+1)}| \leqslant \frac{M}{2} e^{-\alpha(u-u_0)-\beta(v-v_0)} + \frac{\varepsilon}{2} L \max|x^{(n)}| + \frac{\varepsilon}{2} L \max|x^{(n)}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{2} e^{-\alpha(u-u_0)-\beta(v-v_0)} + \varepsilon L M e^{-\alpha(u-u_0)-\beta(v-v_0)} =$$

$$= Me^{-\alpha(u-u_0)-\beta(v-v_0)} \cdot \left(\frac{1}{2} + \varepsilon L\right) \leqslant Me^{-\alpha(u-u_0)-\beta(v-v_0)}.$$

Следовательно,

$$|x(u, v)| \leqslant Me^{-\alpha(u-u_0)-\beta(v-v_0)}$$

для всех $u \geqslant u_0$, $v \geqslant v_0$. Но из последнего неравенства следует справедливость (7) и (8).

Отсюда следует

Теорема 1. *Если собственные значения матриц A и B удовлетворяют условию* (5), *а матрицы $P(u, x)$, $Q(v, x)$ обладают свойством* (4), *то все интегральные поверхности уравнения* (1), *в достаточно малой окрестности начала координат, входят в начало координат при $u, v \to \pm\infty$. Поведение интегральных поверхностей уравнения* (1) *сходно с поведением решений уравнения*

$$dx = Ax\,du + Bx\,dv \tag{9}$$

в том смысле, что линии $x(u, C_v)$, $x(C_u, v)$ на соответствующих интегральных поверхностях обладают свойством (8).

Следствие. *Пусть для каждой из систем*

$$\frac{dx}{du} = Ax + P(u, x),$$

$$\frac{dx}{dv} = Bx + Q(v, x)$$

начало координат является особой точкой одного и того же типа, тогда «суммарная» система

$$\frac{dx}{dt} = (\alpha A + \beta B)x + \alpha P(\alpha t, x) + \beta Q(\beta t, x)$$

будет иметь в начале координат особую точку этого же типа, если матрицы A и B перестановочны, а постоянные α, β разрешают неравенство

$$\mathrm{Re}\,(\alpha\lambda_i^{(a)} + \beta\lambda_i^{(b)}) \leqslant 0.$$

Аналогично тому, как была установлена теорема 1, могут быть доказаны

Теорема 2. *Если собственные значения матриц A, B удовлетворяют условиям**

$$\mathrm{Re}\,(\lambda^{(a)}) < 0, \qquad \mathrm{Re}\,(\lambda_1^{(b)}) < 0, \qquad \mathrm{Re}\,(\lambda_2^{(b)}) > 0, \qquad \mathrm{Re}\,(\lambda_3^{(b)}) > 0,$$

а матрицы $P(u, x)$, $Q(v, x)$ обладают свойством (4), *то поведение интегральных поверхностей уравнения* (1), *в достаточно малой окрестности начала координат, сходно с поведением решений уравнения* (9).

Теорема 3. *Если каждая из совокупностей $\{\lambda^{(a)}\}$, $\{\lambda^{(b)}\}$ содержит*

---

* Возможны, конечно, и другие сочетания.

числа, вещественные части которых противоположны по знаку, и решения уравнения (9) *входят в начало координат «вдоль» некоторых линий, то интегральные поверхности уравнения* (1) *входят в начало координат «вдоль» таких же линий.*

С известной модификацией приведенные результаты могут быть перенесены на систему n уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. Pini, Sui punti singolari per i sistemi ai differenciali totali, Ann. di matematica pura ed appl. ser. quatro, t. XXXIV, 1953.
2. В. В. Немыцкий и В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М. — Л., 1949.

Поступила 6.XI 1964 г.
Ростов-на-Дону