

Метод двух касательных численного решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений

А. Ф. К а л а й д а

В настоящей работе устанавливаются новые свойства метода [6], рассматриваются другие варианты и распространение его на случай систем уравнений, а также применение для определения отрезка существования решения.

1°. Как показано в цитируемой работе, значение решения задачи Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (1)$$

($y, y_0, f(x, y)$ — n -компонентные векторы) в точке $x_1 = x_0 + h$ можно представить покоординатно в таких трех формах (в 1°, 2°, 4° $n = 1$):

$$y_1 = y_0 + hy'_0\theta(x_0, h) + hy'_1[1 - \theta(x_0, h)], \quad (1)$$

$$y_1 = y_0 + h \frac{y'_0 \sqrt{1 + y_1'^2} + y'_1 q(x_0, h) \sqrt{1 + y_0'^2}}{\sqrt{1 + y_1'^2} + q(x_0, h) \sqrt{1 + y_0'^2}}, \quad (2)$$

$$y_1 = y_0 + hy'_0 + h \frac{y'_1 - y'_0}{1 + Q(x_0, h)}. \quad (3)$$

Здесь $y'_0 = f(x_0, y_0)$, $y'_1 = f(x_1, y_1)$, а $\theta(x_0, h)$, $q(x_0, h)$, $Q(x_0, h)$ — некоторые функции аргумента h . Первые две из них имеют простую геометрическую интерпретацию. Именно, функция $x_0 + h\theta(x_0, h)$ означает абсциссу точки пересечения касательных, проведенных к интегральной кривой в точках x_0, x_1 , а функция $q(x_0, h)$ — отношение получающихся при этом отрезков касательных (рисунок). При этом

$$\theta(x_0, h) = \frac{Q(x_0, h)}{1 + Q(x_0, h)}, \quad (4)$$

$$q(x_0, h) = \sqrt{\frac{1 + y_1'^2}{1 + y_0'^2}} \cdot \frac{1}{Q(x_0, h)}. \quad (5)$$

Отметим следующие свойства функции $q(x_0, h)$:

$$1) \quad q(x_0, h) = \frac{1}{q(x_1, -h)}; \quad (6)$$

ней мере, на интервале (x_0, x_1) функции $y(x)$ функция $q(x_0, h)$ определена и непрерывна на отрезке $[0, h]$;

3) $q(x_0, h) \leq 1$, если кривизна интегральной кривой в направлении изменения x не убывает, $q(x_0, h) \geq 1$, если эта кривизна ни возрастает;

4) функция $q(x_0, h)$ инвариантна относительно преобразования поворота.

Из свойства 2) следует, что равенство (2) имеет предельные формы при $y'_0 \rightarrow \pm \infty$ или $y'_1 \rightarrow \pm \infty$ (y_0 и y_1 конечны):

$$y_1 = y_0 + hy'_1 + \frac{h}{q(x_0, h)} \sqrt{1 + y'_1{}^2}, \quad (2')$$

$$y_1 = y_0 + hy'_0 + hq(x_0, h) \sqrt{1 + y'_0{}^2}. \quad (2'')$$

2°. Замена в (3) функции $Q(x_0, h)$ некоторым ее приближением $\tilde{Q}(x_0, h)$ с погрешностью $Q(x_0, h) - \tilde{Q}(x_0, h) = O(h^s)$ приводит к приближенному значению решения

$$\tilde{y}_1 = y_0 + hy'_0 + h \frac{y'_1 - y'_0}{1 + \tilde{Q}(x_0, h)} \quad (3')$$

с погрешностью

$$R(y) = -h(y'_1 - y'_0) \frac{Q(x_0, h) - \tilde{Q}(x_0, h)}{[1 + \tilde{Q}(x_0, h)][1 + Q(x_0, h)]} = O(h^{s+p}). \quad (7)$$

Здесь p — порядок первой, отличной от нуля в точке x_0 , производной функции $y(x)$, $p \geq 2: y''(x_0) = \dots = y^{(p-1)}(x_0) = 0$, $y^{(p)}(x_0) \neq 0$. Приведем ряд необходимых в дальнейшем свойств функции $Q(x_0, h)$:

$$1) \quad Q(x_0, h) = p - 2 + \sqrt{\frac{y_1^{(p)}}{y_0^{(p)}}} + \begin{cases} O(h^3) & \text{при } p = 2, \\ O(h^2) & \text{при } p > 2. \end{cases} \quad (8)$$

$$2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \theta(x_0, h) = \frac{p-1}{p}, \quad (9)$$

а если $y(x) - y_0 = O((x - x_0)^\alpha)$, то

$$\lim_{h \rightarrow 0} q(x_0, h) = \begin{cases} \frac{\alpha}{1-\alpha} & \text{при } 0 < \alpha < 1, \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{при } \alpha > 1, \end{cases} \quad (10)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta(x_0, h) = \frac{\alpha-1}{\alpha} \text{ при } \alpha > 1. \quad (11)$$

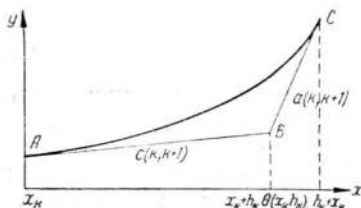
Из (8) следует, что при $p = 2$

$$Q(x_0, h) = Q(x_0, h_1) \cdot Q(\bar{x}, h_2) - \frac{hh_1h_2}{3} \sigma(y) + O(h^4), \quad (12)$$

где

$$\sigma(y) = \frac{1}{20} \frac{y_0^V}{y_0} - \frac{1}{4} \frac{y_0^{IV} y_0^V}{y_0^2} + \frac{2}{9} \left(\frac{y_0^{III}}{y_0} \right)^3,$$

$$\bar{x} = x_0 + h_1, \quad x_1 = \bar{x} + h_2.$$



$$3) \quad Q(x_0, h) = p - 1 + \frac{h}{h_1} (Q(x_0, h_1) - p + 1) + O(h^2), \quad (13)$$

$$(h = h_1 + h_2).$$

4) Для дуги $y(x)$ кривых второго порядка справедливы равенства

$$\tilde{Q}(x_0, h) = \sqrt[3]{\frac{y_1'}{y_0'}} = Q(x_0, h), \quad (14)$$

$$Q(x_0, h) = Q(x_0, h_1) \cdot Q(\bar{x}, h_2). \quad (15)$$

Равенство (14) устанавливается на основании (3), (5) и свойства 4) функции $q(x_0, h)$ непосредственной проверкой для канонической формы уравнений кривых второго порядка. Из (14) следует (15).

Рассмотрим некоторые конкретные приближенные численные методы типа (3') решения задачи (I).

Согласно (7), (8), принимая в качестве $\tilde{Q}(x_0, h)$ функцию вида $\tilde{Q}(x_0, h) = p - 1 + O(h)$, получим новые методы p -го порядка, $p \geq 2$.

В частности, если $y''(x) \neq 0$, $x \in [x_0, x_1]$, то можно положить

$$\tilde{Q}(x_0, h) = \frac{\Phi(x_1, y_1, y_1')}{\Phi(x_0, y_0, y_0')} = 1 + O(h),$$

где $\Phi(x, y, y')$ — знакопостоянная на отрезке $[x_0, x_1]$ достаточно гладкая функция своих аргументов. Так, например, при $\tilde{Q}(x_0, h) = 1$ получаем известный метод Эйлера — Коши, а при

$$\tilde{Q}(x_0, h) = \sqrt{\frac{1 + y_1'^2}{1 + y_0'^2}}, \quad (16)$$

что соответствует $\tilde{q}(x_0, h) = 1$, имеем двухточечный интерполяционный метод второго порядка, геометрическая интерпретация которого заключается в том, что интегральная кривая на отрезке $[x_0, x_1]$ приближается некоторой соприкасающейся окружностью.

Предположим, что кроме начального условия x_0 решение задачи (I) известно в точке $\bar{x} = x_0 + h_1$. Тогда согласно (13) принимаем

$$\tilde{Q}(x_0, h) = p - 1 + \frac{h}{h_1} (Q(x_0, h_1) - p + 1), \quad (17)$$

где

$$Q(x_0, h_1) = \frac{y'(\bar{x}) - \frac{y(\bar{x}) - y_0}{h_1}}{\frac{y(\bar{x}) - y_0}{h_1} - y_0'}. \quad (18)$$

В этом случае получим трехточечный интерполяционный метод не ниже третьего порядка.

При условии

$$y''(x) \neq 0, \quad x \in [x_0, x_1], \quad (19)$$

на основании (3'), (14) будем иметь двухточечный интерполяционный метод четвертого порядка, являющийся точным методом для кривых второго порядка.

Примечание. Без ограничения общности условие (19) можно считать всегда выполненным, если вместо задачи (I) решать задачу

$$Y' = f(x, y) + C(x - x_0), \quad Y(x_0) = y_0, \quad C = \text{const.}$$

Тогда формула (3') заменяется формулой

$$\tilde{y}_1 = y_0 + hy'_0 + h \frac{y'_1 - y'_0 + Ch}{1 + \tilde{Q}_C(x_0, h)} - C \frac{h^2}{2}. \quad (3'')$$

где через $\tilde{Q}_C(x_0, h)$ обозначается функция $\tilde{Q}(x_0, h)$ для функции $Y(x)$. Согласно (14), например,

$$\tilde{Q}_C(x_0, h) = \sqrt[3]{\frac{y'_1 + C}{y'_0 + C}}.$$

Аналогично на основании (3), (12), (15), если решение известно в точке $\bar{x} = x_0 + h_1$, получим трехточечный интерполяционный метод четвертого порядка, также являющийся точным для кривых второго порядка. При этом входящая в (15) функция $Q(x_0, h_1)$ определяется по формуле (18), а функция $Q(\bar{x}, h_2)$ — по формуле

$$Q(\bar{x}, h_2) = \frac{y'_2 - \frac{y_2 - y(\bar{x})}{h_2}}{\frac{y_2 - y(\bar{x})}{h_2} - y'(\bar{x})}, \quad (20)$$

и

$$\tilde{Q}(x_0, h) = Q(x_0, h_1) \cdot Q(\bar{x}, h_2).$$

3°. а) Исследуем сходимость итерационного процесса. Рассматриваемые методы интерполяционные, и решение задачи (I) при их помощи можно осуществлять посредством простой итерации по формуле

$$\tilde{y}_1^{(i+1)} = y_0 + hy'_0 + h \frac{f(x_1, \tilde{y}_1^{(i)}) - y'_0}{\tilde{Q}^{(i)}(x_0, h)}, \quad \tilde{Q}^{(i)}(x_0, h) = \tilde{Q}(x_0, h, \tilde{y}_1^{(i)}), \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (21)$$

Начальное приближение $\tilde{y}_1^{(0)}$ в методах второго порядка определяется по формуле $\tilde{y}_1^{(0)} = y_0 + hy'_0$, в методе третьего порядка — по формуле

$$\tilde{y}_1^{(0)} = y(\bar{x}) + h_2 y'(\bar{x}), \quad (22)$$

в методах четвертого порядка — соответственно по формуле

$$\tilde{y}_1^{(0)} = y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2} y''_0 \quad \text{и} \quad (22'). \quad (22')$$

Сходимость этого итерационного процесса в случае систем уравнений будет гарантирована, если выполняется условие

$$\max_{x, y \in D} \|I_{T_0}(y_1)\| < 1,$$

где $I_{T_0}(y_1)$ — матрица Якоби вектор-функции

$$T_0 = \left\{ h \cdot \frac{\tilde{Q}_j(x_0, h) f_j(x_0, y_0) + f_j(x_1, y_1)}{1 + \tilde{Q}_j(x_0, h)} \right\}$$

по переменной $y_j = \{y_{1,j}\}$, $\{f_j(x, y)\} = f(x, y)$ ($j = 1, 2 \dots n$). D — рассматриваемая область изменения x, y (y — вектор).

б) Исследуем, наконец, сходимость и устойчивость метода.

Пусть задача (I) решается методом (3') с шагом h_k на конечном отрезке $[x_0, x_{k+1}]$. В результате получим приближенное решение \tilde{y}_{k+1} с погрешностью $\eta_{k+1} = y_{k+1} - \tilde{y}_{k+1}$. Считая, что погрешности округления в процессе счета отсутствуют, из (3), (3'), (7) нетрудно установить, что для нормы вектора погрешности $\eta_{k+1} = \{\eta_{j, k+1}\}$ справедлива оценка

$$\|\eta_{k+1}\| \leq R \cdot A \cdot \frac{(AB)^{k+1} - 1}{AB - 1} + (AB)^{k+1} \cdot \|\eta_0\|,$$

где

$$R = \max_{h_k} \|R_k\|, \quad R_k = \{R_{i,k}\},$$

$$A = \max_{h_k} \|E + I_{T_k}(y_k)\|, \quad B = \max_{h_k} \|(E - J_{T_k}(y_{k+1}))^{-1}\|,$$

E — единичная матрица n -го порядка; $J_{T_k}(y_k), J_{T_k}(y_{k+1})$ — матрицы Якоби вектор-функции

$$T_k = \left\{ h_k \frac{\tilde{Q}_i(x_k, h_k) f_{i,k} + f_{i,k+1}}{1 + \tilde{Q}_i(x_k, h_k)} \right\},$$

η_0 — вектор погрешности начальных условий. Отсюда следует, что при $|x_{k+1} - x_0| < \infty, \eta_0 = 0 \quad \lim_{\max |h_k| \rightarrow 0} \|\eta_{k+1}\| = 0$, т. е. метод сходится.

Аналогично, если на каждом шаге интегрирования допускается погрешность, норма которой ограничена величиной δ_0 , то норма накопленной погрешности оценивается величиной

$$\|\Delta_k\| \leq \delta_0 \frac{(AB)^{k+1} - 1}{AB - 1}$$

что свидетельствует об устойчивости метода.

в) Рассмотрим вопрос об осуществлении контроля точности численного решения.

Если в формуле (3') функция $\tilde{Q}(x_0, h)$ удовлетворяет равенству (15), то для контроля точности численного решения весьма удобным является принцип Рунге ([1], стр. i2).

Действительно, пусть решение в точке x_{k+2} получено посредством двух шагов интегрирования h_k и h_{k+1} . Необходимое для применения принципа

Рунге решение в той же точке с шагом $h = h_k + h_{k+1} \overset{h}{y_{k+2}}$ определяется по формулам (15), (3') без итераций и без вычислений правой части уравнения.

Примечание. В формуле Рунге при $h_k \neq h_{k+1}$ вместо множителя

$$L = \frac{1}{2^l - 1}, \quad (l — порядок метода) \text{ следует положить}$$

$$L_1 = \frac{1}{\left(1 + \frac{h_k}{h_{k+1}}\right)^{l+1} - 1 - \left(\frac{h_k}{h_{k+1}}\right)^{l+1}} + \frac{1}{\left(1 + \frac{h_{k+1}}{h_k}\right)^{l+1} - 1 - \left(\frac{h_{k+1}}{h_k}\right)^{l+1}}.$$

При этом локальная погрешность решения в точках x_{k+1} и x_{k+2} определяется приближенно формулами

$$R_{k+1} \approx \frac{h_k}{h} (\tilde{y}_{k+2} - \tilde{y}_{k+2}^h) L_1, \quad R_{k+2} \approx (\tilde{y}_{k+2} - \tilde{y}_{k+2}^h) \cdot L_1.$$

Если функция $\tilde{Q}(x_k, h_k) \neq \text{const}$, то контроль точности можно осуществлять при помощи неравенства $|\tilde{Q}(x_k, h_k) - \lim_{h_k \rightarrow 0} Q(x_k, h_k)| < \varepsilon$ при соответствующем значении $\varepsilon > 0$.

В двухточечном методе четвертого порядка кроме принципа Рунге для определения главной части локальной погрешности решения в точках x_{k+1} , x_{k+2} согласно (7), (8) (при $p = 2$), (12) можно воспользоваться формулами:

$$R_{k+1} \approx - \frac{h_k^3 (\tilde{y}'_{k+1} - \tilde{y}'_k) (Q^*(x_k, h) - \tilde{Q}(x_k, h_k) \cdot \tilde{Q}(x_{k+1}, h_{k+1}))}{3(1 + \tilde{Q}^*(x_k, h_k))^2 \cdot h \cdot h_{k+1}},$$

$$R_{k+2} \approx - \frac{h^3 (\tilde{y}'_{k+2} - \tilde{y}'_k) (Q^*(x_k, h) - \tilde{Q}(x_k, h_k) \cdot \tilde{Q}(x_{k+1}, h_{k+1}))}{3(1 + Q^*(x_k, h))^2 \cdot h_k \cdot h_{k+1}},$$

$$Q^*(x_k, h) = \frac{\tilde{y}'_{k+2} - \frac{\tilde{y}_{k+2} - \tilde{y}_k}{h}}{\frac{\tilde{y}_{k+2} - \tilde{y}_k}{h} - \tilde{y}'_k}.$$

4°. Рассмотрим применение метода для определения отрезка существования решения задачи (I).

Применение численных методов для получения информации о расположении интегральной кривой впервые осуществлено в работах П. С. Бондаренко [2—4]. В работе С. М. Лозинского [5] установлена возможность решения этой задачи при помощи интерполяционных методов Адамса первого и второго порядков в случае, когда правая часть дифференциального уравнения положительная и монотонно возрастающая функция. Естественно, для решения такой задачи можно применить и метод двух касательных. Именно, на основании формулы (1) точное значение отрезка существования решения задачи (I) в заданном прямоугольнике $\Pi = \left\{ \begin{array}{l} |x - x_0| \leq \varrho \\ |y - y_0| \leq b \end{array} \right\}$ записывается в виде

$$\varrho = \frac{b}{|f(x_0, y_0) \theta(x_0, \varrho) + [1 - \theta(x_0, \varrho)] f(x_0 + h, y_0 + h^*)|}, \quad |h| = \varrho, \quad |h^*| = b. \quad (23)$$

Пусть $M = \max_{\Pi} |f(x, y)|$, $m = |f(x_0, y_0)|$. Тогда, очевидно,

$$\varrho \geq \frac{\frac{b}{M}}{1 - \theta(x_0, \varrho) \frac{M - m}{M}} \geq \frac{\frac{b}{M}}{1 - \theta \frac{M - m}{M}}, \quad (24)$$

а в прямоугольнике $\tilde{\Pi} = \left\{ \begin{array}{l} |x - x_0| \leq a, \\ |y - y_0| \leq b. \end{array} \right.$

$$\varrho \geq \min \left\{ a, \frac{\frac{b}{M}}{1 - \theta \frac{M - m}{M}} \right\}, \quad (25)$$

где θ — нижняя оценка $|\theta(x_0, \varrho)|$.

Если функция $y'(x)$ в рассматриваемой области монотонна, то в качестве $\underline{\theta}$ можно принимать такие величины:

$$\underline{\theta} = \frac{\sqrt{1 + M^2}}{\sqrt{1 + M^2} + \sqrt{1 + m^2}}, \quad (26)$$

если кривизна интегральной кривой возрастает (см. свойство 3) функции $q(x_0, h)$ и (4), (5));

$$\underline{\theta} = \frac{p-1}{p} \quad (27)$$

(см. (11)), если известно, что все производные функции $y(x)$ знакопостоянны.

Для приближенного определения $\theta(x_0, \varrho)$ в формулах (23), (24) можно воспользоваться формулами (4), (8). Тогда, решая уравнение (23), определим значение ϱ с погрешностью порядка не ниже $O(\varrho^4)$.

Другой способ определения ϱ заключается в применении метода (3') к решению задачи Коши

$$x' = (f(x, y))^{-1}, \quad x(y_0) = x_0 \text{ на отрезке } [y_0, y_0 + h^*].$$

При этом $q(y_0, h^*) = q(x_0, \varrho)$ и согласно (5)

$$Q(y_0, h^*) = \frac{y_0'}{f(x_0 + h, y_0 + h^*)} Q(x_0, \varrho);$$

$$h = \frac{h^*}{f(x_0, y_0)} + h^* \frac{\frac{1}{f(x_0 + h, y_0 + h^*)} - \frac{1}{f(x_0, h_0)}}{1 + Q(y_0, h^*)}.$$

5°. Рассмотрим примеры.

1) Для решения уравнения $y' = \frac{1}{y}$ при начальном условии $y(0) = 0$ ($y(x) = \sqrt{2x}$) из существующих методов формально применим лишь интерполяционный метод Эйлера. Он дает решение $\tilde{y}(x) = \sqrt{x}$, которое не приближается к точному ни при каких $x > 0$. Формула (2') при $q(x_0, h) = 1$ ($\alpha = \frac{1}{2}$, см. (12)) дает решение $\tilde{y}(x) = \sqrt{2x + x^2}$. Здесь погрешность при достаточно малых $x > 0$ может стать сколь угодно малой.

2) Определим отрезок существования решения уравнения $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$ (см. [5]) в области $\Pi = \left\{ \begin{array}{l} x \leq \varrho \\ |y| \leq 1 \end{array} \right.$. Имеем $b = 1$, $M = 1 + \varrho^2$, $m = 0$. Согласно (24), (27) получаем $\varrho \geq 1$ (при $p = 2$), $\varrho \geq 1,21$ (при $p = 3$, так как $y''(0) = 0$, $y'''(0) \neq 0$); согласно (24), (26) находим, что $\varrho = 1,39$. По теореме существования $\varrho \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$ ($y(1, 4) = 1,134$).

Для определения отрезка существования решения этого уравнения в области $x < \varrho$, $y < \infty$ применялся метод (3'), (14). Результаты вычислений приведены в таблице. Известно [5], что $2,002 < \varrho < 2,005$.

x	0,0	1,0	1,4	1,8	1,95	2,0	2,002	2,0029	2,00293	2,00293283
y	0,0	0,351	1,134	4,727	$1,92 \cdot 10^1$	$3,408 \cdot 10^2$	$1,072 \cdot 10^3$	$3,046 \cdot 10^3$	$3,534 \cdot 10^4$	$2,8269 \cdot 10^{10}$

Методом С. М. Лозинского [5] при помощи электронной вычислительной машины получено $\varrho = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Коллатц, Численные методы решения дифференциальных уравнений, ИЛ, 1955.
2. П. С. Бондаренко, Вісн. Київськ. ун-ту, № 2, сер. астрон. матем. та мех., вип. 1, 1959.
3. П. С. Бондаренко, УМЖ, т. 12, № 2, 1960.
4. П. С. Бондаренко, УМЖ, т. 13, № 1, 1961.
5. С. М. Лозинский, Вестн. Ленингр. ун-та, № 1, сер. матем. мех. и астрон., вып. 1, 1962.
6. О. Ф. Калайда, Вісн. Київськ. ун-ту, № 5, сер. матем., мех., вип. 2, 1962.

Поступила 17.√ 1962 г.

Киев