Суммирование разбавленных рядов методом Абеля — Пуассона

В. И. Мельник

Пусть дан ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{1}$$

с действительными членами a_n. Вставив между членами ряда (1) нули, т. е. разбавив ряд (1) нулями, получим новый ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n'. \tag{2}$$

Введем обозначения

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = S_n, \quad \sum_{k=0}^{n} a_k' = S_n'.$$

Ясно, что разбавление ряда нулями никак не влияет на его сходимость, однако оно сказывается на суммируемости ряда. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Произвольный ряд* (1) *может быть разбавлен нулями так, что разбавленный ряд* (2) *будет суммироваться методом Абеля — Пуассона к наперед заданному конечному частичному пределу последовательности* S_n. *Существует ряд с ограниченными частными суммами такой, что при любом разбавлении его нулями он не будет суммироваться методом Абеля — Пуассона к числу, отличному от частичных пределов последовательности* S_n.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} S_{q_k} = S$, где q_k — возрастающая последовательность натуральных чисел.

Обозначим

$$q_k - q_{k-1} = \Delta_k, \quad \sum_{n=q_{k-1}+1}^{q_k} |a_n| = \alpha_k, \ q_0 = 0 \ (k = 1, 2, \ldots).$$

Определим последовательность p_k из следующих условий:

$$p_k < p_{k+1} - \Delta_{k+1}, \ p_0 = 0, \tag{3}$$

$$\alpha_k < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{p_k - \Delta_k}, \tag{4}$$

$$\frac{\alpha_k \Delta_k}{p_k} < \frac{1}{k^2}. \tag{5}$$

Разбавим ряд (1) нулями так, чтобы члены разбавленного ряда (2) определялись из соотношений:

$$a_0 = a_0',$$

$$a_n = a_m', \quad \text{где } m = n + p_k - q_k, \text{ при } q_{k-1} < n \leqslant q_k,$$

$$0 = a_m' \quad \text{для всех других } m.$$

Теперь употребим следующую теорему [1]:

а) если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при $|x| < 1$;

б) $a_n = 0$ для $p_k < n < n_{k+1}$, где n_k, p_k — фиксированные последовательности чисел натурального ряда такие, что $n_k < p_k < n_{k+1}$;

в) $\lim_{k\to\infty} S_{p_k} = S$;

г) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k - n_k}{p_k} \alpha_k < +\infty$, где $\alpha_k = \sum_{n=n_k}^{p_k} |a_n|$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ суммируется методом Абеля—Пуассона к числу S.

В данном случае условие а) следует из 4), г) — из 5). Значит, разбавленный ряд суммируется к числу S, и первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части теоремы рассмотрим ряд (1), в котором $a_{2^k} = 1$, $a_{2^k+1} = -1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $a_n = 0$ для всех других n. Разбавив ряд (1) нулями, получим ряд (2), в котором $1 = a_{2^k} = a_{n_k}'$, $-1 = a_{2^k+1} = a_{m_k}'$, $a_n' = 0$ для всех других n, где $2^k \leqslant n_k < m_k < n_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Ясно, что $S_{n_k}' = S_{2^k} = 1$, $S_{m_k}' = S_{2^k+1} = 0$.

Множества частичных пределов последовательностей S_n, S_n', очевидно, совпадают и состоят из двух точек 0 и 1.

Теперь нам потребуется следующее определение ([2], стр. 509). Точка S называется (C)-точкой последовательности S_n, если каждому $\varepsilon > 0$ можно указать число $\lambda(\varepsilon) > 1$ и последовательности натуральных чисел n_k, p_k,

$$n_k < p_k \leqslant n_{k+1} \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

такие, что $|S - S_n| < \varepsilon$ для $n_k \leqslant n \leqslant p_k$ и $p_k/n_k \geqslant \lambda(\varepsilon) > 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Покажем, что по крайней мере одна из точек 0 или 1 будет (C)-точкой последовательности S_n'.

Допустим, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_k - 1}{m_{k-1}} = 1, \tag{6}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{m_k - 1}{n_k} = 1. \tag{7}$$

Тогда для $\varepsilon > 0$ и $k > k_0(\varepsilon)$ имеем:

$$\frac{n_k}{m_{k-1}} < 1 + \varepsilon, \quad \frac{m_k}{n_k} < 1 + \varepsilon.$$

Отсюда

$$\frac{n_k}{m_{k-1}} \cdot \frac{m_k}{n_k} = \frac{m_k}{m_{k-1}} < (1 + \varepsilon)^2$$

и, следовательно, для $k > k_0 + 2$

$$2^k \leqslant n_k < m_k = \frac{m_k}{m_{k-1}} \cdot \frac{m_{k-1}}{m_{k-2}} \cdots \frac{m_{k_0+2}}{m_{k_0+1}} \cdot m_{k_0+1} < m_{k_0+1} \cdot (1+\varepsilon)^{2(k-k_0-1)},$$

т. е.

$$2^k < \frac{m_{k_0+1}}{(1+\varepsilon)^{2(k_0+1)}} (1+\varepsilon)^{2k}.$$

Это неравенство противоречиво, если $\varepsilon > 0$ взять достаточно малым.

Следовательно, одновременно равенства (6) и (7) не могут иметь места. Поэтому справедливо по крайней мере одно из неравенств

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{n_k - 1}{m_{k-1}} = \lambda' > 1, \tag{8}$$

или

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{m_k - 1}{n_k} = \lambda'' > 1. \tag{9}$$

Допустим, что справедливо неравенство (8). Тогда найдется подпоследовательность k_p такая, что $\frac{n_{k_p} - 1}{m_{k_p-1}} \geqslant \lambda^*$ $(p = 1, 2, \ldots)$, где $1 < \lambda^* < \lambda'$. Так как $S'_{m_{k_p-1}} = 0$ и $a'_n = 0$ для $m_{k_p-1} < n \leqslant n_{k_p} - 1$, то точка 0 является (C)-точкой последовательности S'_n. Если же справедливо неравенство (9) то, как и в первом случае, получим

$$\frac{m_{k_p} - 1}{n_{k_p}} \geqslant \lambda^{**} \quad (p = 1, 2, \ldots),$$

где

$$1 < \lambda^{**} < \lambda''.$$

Так как $S'_{n_{k_p}} = 1$ и $a'_n = 0$ для $n_{k_p} < n \leqslant m_{k_p} - 1$, то точка 1 будет являться (C)-точкой последовательности S'_n.

Итак, любое разбавление нулями ряда (1) приводит к тому, что по крайней мере одна из точек 0 или 1 будет (C)-точкой последовательности S'_n. Так как последовательность S'_n ограничена, то по известной теореме ([3], стр. 197) из суммируемости ее методом Абеля — Пуассона следует суммируемость $(c, 1)$-методом. Известно также ([2], стр. 510), что если ряд (2) суммируем каким-нибудь (c, p)-методом к числу A и если точка S есть (C)-точка последовательности частных сумм этого ряда, то $S = A$. Таким образом, последовательность S'_n может суммироваться $(c, 1)$-методом только к 0 или 1 в зависимости от того, будет ли (C)-точкой соответственно 0 или 1. Значит, никакое разбавление нулями ряда (1) здесь не может привести к тому, что разбавленный ряд (2) станет суммироваться методом Абеля — Пуассона к числу S, отличному от 0 и 1.

В заключение заметим, что доказанная теорема справедлива и для ряда (1) с комплексными членами a_n.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Давыдов, Обобщение второй теоремы Абеля, УМН, т. X, вып. 3 (65), 1955.
2. Н. А. Давыдов, Об одном свойстве методов Чезаро суммирования рядов, Матем. сб., т. 38 (80): 4, 1956, 509—524.
3. Г. Харди, Расходящиеся ряды, ИЛ, 1951.

Поступил 30. X 1963 г.
Киев