# Замечание о теореме Картера

*В. С. Чарин*

Картер доказал в [1] следующую интересную теорему.

Всякая конечная разрешимая группа $G$ содержит нильпотентную подгруппу $H$, совпадающую со своим нормализатором, и любые две такие подгруппы сопряжены. Любая подгруппа, содержащая $H$, совпадает со своим нормализатором. Кроме того, подгруппа, порожденная с помощью подгрупп $H$ и $g^{-1}Hg$, содержит элемент $g$ для всякого $g \in G$.

Условимся такую подгруппу $H$ называть подгруппой Картера.

Теорема Картера переносилась на некоторые классы бесконечных групп (см. например, [2]).

В настоящей заметке показывается, что имеются аналоги этой теоремы и для топологических групп. Для удобства формулировки соответствующего результата воспользуемся следующими известными определениями.

Топологическая группа $G$ называется разрешимой в топологическом смысле, если для любой окрестности $V$ ее единицы найдется такое натуральное число $n$, что $n$-й коммутант $G^{(n)}$ группы $G$ содержится в $V$.

Топологическая группа $G$ называется нильпотентной в топологическом смысле, если для любой окрестности $V$ ее единицы найдется такое натуральное число $n$, что $n$-й член $G_n$ ее нижнего центрального ряда содержится в $V$.

Для дискретных групп эти определения сводятся к обычным определениям разрешимости и нильпотентности. Поэтому в последующем ради простоты всюду будем опускать слова «в топологическом смысле» и будем говорить кратко «разрешимая группа», «нильпотентная группа», вкладывая в это топологический смысл.

Теперь докажем следующий аналог теоремы Картера.

Всякая вполне несвязная компактная и разрешимая группа $G$ обладает замкнутой нильпотентной подгруппой $H$, совпадающей со своим нормализатором; всякая замкнутая подгруппа, содержащая $H$, также совпадает со своим нормализатором.

Любые две подгруппы, обладающие теми же свойствами, что и подгруппа $H$, сопряжены.

Кроме того, если $g$ — любой элемент из $G$, то он содержится в наименьшей замкнутой подгруппе, содержащей $H$ и $g^{-1} Hg$.

Доказательство. Пусть топологическая группа $G$ удовлетворяет условиям теоремы. Хорошо известно, что в такой группе в качестве полной системы окрестностей единицы можно взять совокупность всех открытых инвариантных подгрупп $U_\alpha$. Можно считать, что индексы $\alpha$ пробегают множество $A$. Установим на $A$ частичный порядок, полагая $\alpha < \beta$, если $U_\alpha \supset U_\beta$. Этот частичный порядок удовлетворяет условию неограниченности: если $\alpha, \beta \in A$, то найдется $\gamma \in A$, что $\alpha < \gamma$, $\beta < \gamma$.

Каждая фактор-группа $G_\alpha = G/U_\alpha$ является конечной разрешимой группой, причем при $\alpha < \beta$ группа $G_\alpha$ — гомоморфный образ $G_\beta$. Этот гомоморфизм обозначим через $\pi_{\alpha\beta}$. Все они удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\pi_{\alpha\alpha} = 1, \ \pi_{\alpha\gamma} = \pi_{\alpha\beta} \cdot \pi_{\beta\gamma}, \text{ если } \alpha < \beta < \gamma. \tag{1}$$

Топологическая группа $G$ поэтому может рассматриваться как проективный предел множества конечных разрешимых групп $G_\alpha$, $\alpha \in A$, относительно отображений $\pi_{\alpha\beta}$.

Любой элемент $x$ группы $G$ — полное проекционное множество $[x_\alpha]$, $x_\alpha \in G_\alpha$, $\alpha \in A$, так что для $\alpha < \beta$ выполняется соотношение $x_\alpha = \pi_{\alpha\beta} x_\beta$. Элемент $x_\alpha$ при фиксированном $\alpha$ отождествляется с тем элементом из $G_\alpha$, который соответствует $x$ при естественном гомоморфизме

$$\varphi_\alpha : G \to G_\alpha. \tag{2}$$

Пусть $\alpha, \beta \in A$, $\alpha < \beta$ и пусть $H_\beta$ — подгруппа Картера группы $G_\beta$. Рассмотрим подгруппу $H_\alpha = \pi_{\alpha\beta} H_\beta$ из $G_\alpha$. Она нильпотентна. Если $x \in G_\alpha$ и $x^{-1} H_\alpha x = H_\alpha$, а $y$ — такой элемент из $G_\beta$, что $x = \pi_{\alpha\beta} y$, то $y^{-1} H_\beta y \subseteq H_\beta \cdot R$, где $R$ — ядро гомоморфизма $\pi_{\alpha\beta}$. Поэтому $y^{-1} H_\beta R y = H_\beta R$. Но $H_\beta R$ содержит картеровскую подгруппу $H_\beta$. Следовательно $y \in H_\beta R$. Но тогда $x = \pi_{\alpha\beta} y$ — элемент из $H_\alpha$. Иначе говоря, $H_\alpha$ совпадает со своим нормализатором, т. е. $H_\alpha$ — картеровская подгруппа $G_\alpha$.

Если $\sum_\beta$ — множество всех картеровских подгрупп группы $G_\beta$, то из сказанного следует, что $\pi_{\alpha\beta}$ индуцирует однозначное отображение множества $\sum_\beta$ в множество $\sum_\alpha$, если $\alpha < \beta$. Это отображение снова будем обозначать через $\pi_{\alpha\beta}$. Оно также удовлетворяет соотношениям (1).

Таким образом, система конечных множеств $\sum_\alpha$, $\alpha \in A$, и отображений $\pi_{\alpha\beta}$ удовлетворяет условиям леммы Куроша ([3], стр. 353), а поэтому для нее существует полное проекционное множество $T = [H_\alpha]$ картеровских подгрупп. Значит, для $H_\alpha$, $H_\beta$ из $T$ при $\alpha < \beta$ справедливо соотношение

$$H_\alpha = \pi_{\alpha\beta} H_\beta. \tag{3}$$

Обозначим через $H$ множество таких элементов $x = [x_\alpha]$ из $G$, для которых $x_\alpha \in H_\alpha$ при всех $\alpha \in A$ и $x_\alpha = \pi_{\alpha\beta} x_\beta$ при $\alpha < \beta$, т. е. $H$ — проективный предел множества подгрупп $H_\alpha$ относительно отображений $\pi_{\alpha\beta}$.

Так как $\pi_{\alpha\beta}$ — гомоморфизмы, то $H$ — подгруппа в $G$. Она замкнута в тихоновском произведении всех $H_\alpha$, поэтому компактна и, следовательно, замкнута в $G$.

Покажем, что $H$ совпадает со своим нормализатором в $G$. Пусть $y \in G$, $y^{-1} H y = H$. Ясно, что $H_\alpha = \varphi_\alpha H$. Если $y_\alpha = \varphi_\alpha y$, то $y_\alpha^{-1} H_\alpha y_\alpha = H_\alpha$. Поэтому $y_\alpha \in H_\alpha$. Так как множество всех $y_\alpha$ проекционное, то $y = [y_\alpha]$ — элемент из $H$. Точно также показывается, что любая замкнутая подгруппа, содержащая $H$, совпадает со своим нормализатором.

Пусть $F$ — некоторая замкнутая нильпотентная подгруппа из $G$ и всякая замкнутая подгруппа, содержащая $F$, совпадает со своим нормализатором. Покажем, что она сопряжена с $H$.

Группа $F$ — проективный предел нильпотентных групп $F_\alpha = \varphi_\alpha F$ относительно отображений $\pi_{\alpha\beta}$ (см. [4], стр. 38). Каждая подгруппа $F_\alpha$ совпадает со своим нормализатором. В самом деле, если $x_\alpha^{-1} F_\alpha x_\alpha = F_\alpha$, $x_\alpha \in G_\alpha$ и $x$ — такой элемент из $G$, что $x_\alpha = \varphi_\alpha x$, то $x^{-1} F x \subseteq F R_\alpha$, где $R_\alpha$ — ядро гомоморфизма $\varphi_\alpha$. Значит, $x^{-1} F R_\alpha x = F R_\alpha$. Поэтому $x \in F R_\alpha$ и, следовательно, $x_\alpha = \varphi_\alpha x \in F_\alpha$.

Ввиду теоремы Картера $F_\alpha$ и $H_\alpha$ сопряжены:

$$F_\alpha = x_\alpha^{-1} H_\alpha x_\alpha,$$

где $x_\alpha \in G_\alpha$. Обозначим через $\Omega_\alpha$ множество всех $x_\alpha$ с таким свойством для $\alpha \in A$. Пусть $\alpha < \beta$ и $x_\beta \in \Omega_\beta$. Если $x_\alpha = \pi_{\alpha\beta} x_\beta$, то ясно, что $x_\alpha^{-1} H_\alpha x_\alpha = F_\alpha$. Значит, $\pi_{\alpha\beta}$ индуцирует отображение множества $\Omega_\beta$ в множество $\Omega_\alpha$, которое также обозначим через $\pi_{\alpha\beta}$.

Система конечных множеств $\Omega_\alpha$, $\alpha \in A$, и отображений $\pi_{\alpha\beta}$ снова удовлетворяет условиям леммы Куроша. Поэтому для них найдется по крайней мере одно проекционное множество $x = [x_\alpha]$, являющееся элементом группы $G$.

Покажем, что $x^{-1} H x = F$.

Допустим, что $x^{-1} H x = K \neq F$. Это значит, что найдется такой элемент $y \in F$, что $y \overline{\in} K$, либо же такой элемент $y \in K$, что $y \overline{\in} F$. Пусть, например, $y \in F$ и $y \overline{\in} K$. Найдется окрестность $U_\alpha$ единицы группы $G$, для которой множество $yU_\alpha$ не пересекается с множеством $K \cdot U_\alpha$. Это значит, что $y_\alpha = \varphi_\alpha y$ не принадлежит $\varphi_\alpha K = x_\alpha^{-1} H_\alpha x_\alpha$. Вместе с тем $y_\alpha \in F_\alpha$. Однако $\varphi_\alpha K = F_\alpha$. Полученное противоречие показывает, что $x^{-1} H x = F$.

Легко показывается, что подгруппа $H$ обладает всеми остальными свойствами, характерными для картеровских подгрупп.

Замечание. Болкер [5] доказал существование силовских баз и сопряженность их для компактных нульмерных разрешимых групп. Это доказывается просто с помощью метода, примененного в настоящей заметке.

## ЛИТЕРАТУРА


1. R. W. Carter, Nilpotent self — normalizing subgroups of soluble groups, Math. Z., 75, 1961, 136—139.
2. S. E. Stonehewer, Abnormal subgroups of a class of periodic locally soluble groups, Proc. London Math. Soc., 14, 1964, 520—536.
3. А. Г. Курош, Теория групп, Гостехиздат, 1953.
4. А. Вейль. Интегрирование в топологических группах и его применение, ИЛ, М., 1950.
5. E. D. Bolker, Inverse limits of solvable groups., Proc. Amer. Math. Soc., 14, 1963, 147—152.



Поступила 24.II 1965 г.

Свердловск