Уравнения первого порядка с функциональными производными

Ю. Л. Далецкий и Н. М. Кухарчук

1°. Пусть B — банахово пространство и $F(x)$ — функционал в нем, имеющий непрерывный дифференциал Фреше. Это означает, что справедлива формула

$$F(x+h)-F(x)=F_1(x,h)+o(\|h\|) \qquad (x, h\in B),$$

где $F_1(x,h)$ — функционал, линейный по h при каждом $x\in B$, непрерывный по x при фиксированном h. Ему соответствует элемент $F'(x)\in B^*$ (производная), так что

$$F_1(x;h)=(h, F'(x)).$$

В настоящей заметке рассматриваются уравнения вида

$$(\alpha(x, F), F'(x))=a(x, F), \tag{1}$$

где $\alpha(x,F)$ и $a(x,F)$ — операторы, отображающие пространство $B_1=B\times R$ соответственно в B и $R=(-\infty,\infty)$.

Уравнение типа (1) является естественным аналогом квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, получающегося из (1) в случае, когда пространство B конечномерно. Ниже будут рассмотрены и нелинейные уравнения первого порядка. Оказывается, что многие положения классической теории таких уравнений, в частности, теория характеристик, теория Гамильтона — Якоби (см. [1]) переносятся и на рассматриваемый случай.

Некоторые из изучаемых нами вопросов не вполне строго рассматривались в [2].

2°. Пара операторов $\alpha(x, F)$ и $a(x, F)$ порождает оператор A, действующий в пространстве B_1. Уравнение

$$\frac{dy}{ds} = A(y), \tag{2}$$

эквивалентное системе

$$\frac{dx}{ds} = \alpha(x, F), \qquad \frac{dF}{ds} = a(x, F), \tag{2'}$$

назовем характеристическим для уравнения (1), а интегральные кривые $y = y(s)$ уравнения (2) в пространстве B_1 — характеристиками уравнения (1). Каждый функционал $F(x)$ $(x \in B)$ описывает некоторую поверхность в пространстве B_1. Назовем ее интегральной поверхностью уравнения (1), если $F(x)$ удовлетворяет этому уравнению.

Т е о р е м а. *Всякая поверхность в пространстве B_1, образованная семейством характеристик уравнения* (1), *является интегральной поверхностью этого уравнения. Всякая интегральная поверхность уравнения* (1) *состоит из характеристик.*

3°. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1). Пусть отыскивается интегральная поверхность этого уравнения, проходящая через начальное многообразие G в пространстве B_1, заданное уравнениями $\psi_1(x, F) = 0$, $\psi_2(x, F) = 0$ $(x \in B, F \in R)$, где ψ_1, ψ_2 — дифференцируемые функционалы. Допустим, что характеристическая система (2) имеет решение $x = \varphi(s, x_0, F_0)$, $F = \Phi(s, x_0, F_0)$, определенное в некоторой окрестности $|s| \leqslant \sigma$ и удовлетворяющее условиям $\varphi(0, x_0, F_0) = x_0$, $\Phi(0, x_0, F_0) = F_0$, когда $(x_0, F_0) \in D$, где D — некоторая область начального многообразия G. Проводя через каждую точку области D характеристику, мы получим участок интегральной поверхности, если только в D выполнено условие

$$(\alpha(x, F),\ \psi'_{1x}(x, F)\,\psi'_{2F}(x, F) - \psi'_{2x}(x, F)\,\psi'_{1F}(x, F)) \neq 0.$$

4°. Рассмотрим некоторые условия, при которых характеристическая система имеет решение.

Л е м м а. *Пусть функционал $a(x, F)$ удовлетворяет условию Липшица и пусть задача Коши*

$$\frac{dx}{ds} = \alpha(x, F(s)), \qquad x(0) = x_0, \tag{3}$$

локально разрешима при любой дифференцируемой функции $F(s)$, удовлетворяющей условию $F(0) = F_0$ и принимающей значения из некоторой окрестности точки F_0. Допустим, далее, что это решение x_F непрерывно зависит от функции $F(s)$ в том смысле, что

$$\max \| x_{F_1}(s) - x_{F_2}(s) \| \leqslant C \cdot \max | F_1(s) - F_2(s) |.$$

Тогда задача Коши для уравнения (2) *с условиями $x(0) = x_0$, $F(0) = F_0$ локально разрешима и имеет единственное решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится путем применения принципа сжатых отображений.

В силу леммы достаточно рассмотреть условия разрешимости задачи

(3). Можно перечислить некоторые условия, при каждом из которых решение этой задачи обладает свойствами, требуемыми в лемме:

1) функция $\alpha(x, F)$ удовлетворяет условию Липщица;

2) справедливо представление $\alpha(x, F) = \alpha_0(F)x + \alpha_1(x, F)$, где $\alpha_1(x, F)$ удовлетворяет условию Липшица, а $\alpha_0(F)$ — линейный неограниченный оператор, сильно дифференцируемый по F и удовлетворяющий известным условиям Т. Като [3];

3) операторы $\alpha_0(F)$ и $\alpha_1(\cdot, F)$ удовлетворяют условиям П. Е. Соболевского [4]. Оператор $\alpha_1(\cdot, F)$ в этом случае может быть и неограниченным, но в определенном смысле подчиненным оператору $\alpha_0(F)$.

5°. Пусть φ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — линейно независимый набор элементов из B и B_n — подпространство, состоящее из элементов вида $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\varphi_k$. Пусть P_n — некоторый проекционный оператор на B_n. На элементах из B_n функционал $F(x)$ порождает функцию $F_n(x_1, \ldots, x_n) = F\left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\varphi_k\right)$. Если $F(x)$ удовлетворяет уравнению (1), то для функции F_n можно получить уравнение

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x, F_n(x)) \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_k} = a(x, F_n(x)) + \varepsilon_n \qquad (x \in B_n). \tag{4}$$

Допустим, что рассматривается последовательность подпространств B_n возрастающей размерности, такая, что $P_n \to I$ и $\|P_n\| \leqslant C$ (пространство при этом предполагается сепарабельным). В этом случае можно показать, что $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Характеристическая система, соответствующая уравнению (4), представляет собой систему $n + 1$ обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_k}{ds} = \alpha_k(x, F_n) \qquad (k = 1, \ldots, n), \qquad \frac{dF_n}{ds} = a(x, F_n) + \varepsilon_n. \tag{5}$$

Если выполнено одно из условий предыдущего пункта, то можно отбросить в уравнениях (4) и (5) слагаемое ε_n и получить аппроксимацию задачи (1) — (2) конечномерными задачами.

6°. Пусть B — рефлексивное пространство. Положим $B_2 = B + B^* + R$. Каждый элемент $z \in B_2$ определяется тройкой $z = (x, \xi, u)$, где $x \in B$, $\xi \in B^*$, $u \in R$. Пусть $F(z)$ — непрерывный функционал на B_2. Соотношение

$$F(z) = F(x, \xi, u) = 0 \tag{6}$$

определяет дифференциальное уравнение первого порядка от функционала $u(x)$ в B. Этот функционал $u(x)$ назовем решением уравнения (6), если оно удовлетворяется при подстановке $u = u(x), \xi = u'(x)$ тождественно в некоторой области пространства B.

Характеристическая система для (6) представляет собой уравнение в пространстве B_2, эквивалентное системе трех уравнений

$$\frac{dx}{ds} = F'_\xi(x, \xi, u), \qquad \frac{d\xi}{ds} = -\xi F'_u(x, \xi, u) + F'_x(x, \xi, u), \qquad \frac{du}{ds} = (F'_\xi(x, \xi, u), \xi).$$

Можно показать, что на этот случай обобщаются рассмотрения, проведенные выше для квазилинейного уравнения.

7°. Назовем полным интегралом уравнения (6) решение его, зависящее от параметра b: $u = \varphi(x, b)$, где b пробегает некоторое пространство $\mathfrak{B}$, которое нам будет удобно отождествлять с B^*. Пусть $b = V(\beta)$ — оператор (нелинейный) в B^*. Его производная при каждом $\beta \in B^*$ является линейным оператором в B^*. Допустим, что $V'(\beta)$ переводит все пространство B^* в подпространство «размерности на единицу меньшей», точнее, что существует вектор $\theta(\beta) \in B^*$, единственный с точностью до линейной зависимости, для которого $(V'(\beta)\xi, \theta(\beta)) = 0$ при $\xi \in B^*$. При этом условии можно построить огибающую семейства поверхностей $u = \varphi(x, V(\beta))$ в B_1, являющуюся интегральной поверхностью уравнения (6). Линии касания этой поверхности с поверхностями полного интеграла представляют собою характеристики рассматриваемого уравнения. При этом получается полная система характеристик.

Рассмотрим далее уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H(x, u'_x, t) = 0, \tag{7}$$

не содержащее явно u. Характеристическая система для него имеет канонический вид

$$\frac{dx}{dt} = H'_p(x, p, t); \qquad \frac{dp}{dt} = -H'_x(x, p, t). \tag{8}$$

Предположим, что $u = \varphi(x, b) + C$, $(b \in B^*)$ — полный интеграл уравнения (7) и что вторая смешанная производная φ''_{bx} является ограниченным оператором в B, имеющим ограниченный обратный.

При этих условиях справедлив следующий результат, обобщающий на рассматриваемый случай классическую теорему Якоби.

Теорема. *Общее решение канонической системы* (8) *в неявном виде определяется системой уравнений*

$$\varphi'_b(x, b) = f; \qquad \varphi'_x(x, b) = p \qquad (x \in B, p \in B^*)$$

с произвольными параметрами $f \in B$, $b \in B^*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Курант, Уравнения с частными производными, изд-во «Мир», 1964.
2. P. Levy, Problemes concrets d'analyse fonctionalle, Paris, 1951.
3. T. Kato, Integration of the equation of evolution in a Banach space, J. Math. Soc. Japan, 5, 1953.
4. П. Е. Соболевский, Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве, Тр. Моск. матем. о-ва, 10, 1961, 297—350.

Поступила 10.VI 1965 г.
Киев