Некоторые вопросы вариационного исчисления для функционалов от вектор-функций со значениями в банаховом пространстве

Н. М. Кухарчук

1. Классическая задача вариационного исчисления связана с изучением функционалов вида

$$\Phi[x(t)] = \int_a^b F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}_{(t)})\, dt, \tag{1}$$

где $x(t)$ — вектор-функция со значениями из конечномерного пространства. Оказывается, что если использовать некоторые положения дифференциального исчисления в банаховом пространстве B (см. [1]), то многие результаты классической теории распространяются и на тот случай, когда $x(t)$ при каждом t является элементом банахового пространства B.

Рассмотрим только случай $n = 1$, так как общий случай аналогичен.

Пусть $F(x)$ — функционал в банаховом пространстве B. Если его приращение можно представить в виде

$$F(x+h) - F(x) = l(x, h) + o(\|h\|), \qquad (x, h \in B),$$

где $l(x, h)$ — линейный по h функционал, то элемент пространства B^*, порождающий этот функционал, будем обозначать $\frac{\delta F}{\delta x}$ и называть сильной производной:

$$l(x, h) = \left(h, \frac{\delta F}{\delta x}\right);$$

$\frac{\delta F}{\delta x}$ — оператор (вообще, нелинейный), действующий из B в B^*.

Наряду с пространством B будем рассматривать пространство $C_n(B)$, состоящее из всех функций на $[a, b]$ со значением из B, имеющих непрерывную производную до порядка n включительно.

Если $F(t, x(t), x_t'(t))$ — непрерывно зависящий от параметра t функционал, то функционал типа (1) и его сильная производная выражаются формулами

$$\Phi[x(t)] = \int_0^1 F(t, x(t), x'(t))\, dt, \tag{1'}$$

$$\frac{\delta \Phi}{\delta x} = \frac{\delta F}{\delta x(t)} - \frac{d}{dt}\frac{\delta F}{\delta x'(t)}. \tag{2}$$

Поскольку известно (см. [3]), что необходимым условием экстремума для дифференцируемого функционала является равенство нулю его сильной производной, то мы получаем аналог уравнения Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\delta F}{\delta x(t)} - \frac{d}{dt}\frac{\delta F}{\delta x'(t)} = 0 \tag{3}$$

как необходимое условие экстремума этого функционала.

Уравнение (3) является обыкновенным дифференциальным уравнением относительно функции $x(t)$ со значениями в B.

Аналогичным образом для функционала (1′) можно рассматривать и другие задачи, например, изопериметрическую, задачу на условный экстремум и т. д.

2. Рассмотрим уравнение Эйлера — Лагранжа (3).
Вместо переменных t, $x(t)$, $x'(t)$, F введем новые переменные t, x, p, H при помощи соотношений

$$\frac{\delta F(t, x(t), x'(t))}{\delta x'(t)} = p, \qquad H = -F(t\ \ x(t), x'(t)) + (x'(t), p), \tag{4}$$

где $t \in R(0, 1)$, $x \in B$, $p \in B^*$. H — «функционал Гамильтона». Такая замена переменных возможна, если уравнение $\frac{\delta F(t, x(t), x'(t))}{\delta x'(t)} = p$ разрешимо относительно $x'(t)$. Для разрешимости этого уравнения относительно функции $x'(t)$ (в силу общей теоремы о существовании неявной функции (см. [3]) достаточно, чтобы линейный оператор $\frac{\delta^2 F(t, \cdot, \cdot)}{(\delta x'(t))^2}$ действующий из B в B^*, в окрестности точки $(t, x(t), x'(t))$ был ограничен и имел ограниченный обратный.

Переменные t, x, p, H, связанные со старыми переменными $t, x(t), x'(t), F$ соотношениями (4), называются каноническими. Переходя к этим переменным, мы, в случае, когда B — рефлексивное пространство, приведем уравнение Эйлера — Лагранжа к каноническому виду

$$\frac{\delta H}{\delta x} = -\frac{dp}{dt}, \qquad \frac{\delta H}{\delta p} = \frac{dx}{dt}. \tag{5}$$

Заметим, что $\frac{\delta H}{\delta p}$ принадлежит, вообще, пространству B^{**}, а $\frac{dx}{dt}$ — B. При $B = B^{**}$ эти уравнения имеют смысл.

Рассмотрим преобразование (6)

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}(t, x, p), \qquad P = P(t, x, p), \tag{6}$$

где $t \in R[0, 1]$, $x \in B$, $p \in B^*$.

Преобразование (6) называется каноническим, если оно сохраняет вид уравнения (5).

Каноническое преобразование существует, если на $B \times B^*$ определен некоторый «производящий» функционал $\Psi(t, x, p)$, такой, что выполняется равенство

$$(dx, p) - H dt = (d\mathrm{X}, P) - \widetilde{H} dt + d\Psi(t, x, p), \tag{7}$$

при этом $\widetilde{H}$ служит гамильтонианом и канонические уравнения имеют вид

$$\frac{d\mathrm{X}}{dt} = \frac{\delta \widetilde{H}}{\delta P}, \qquad \frac{dP}{dt} = -\frac{\delta \widetilde{H}}{\delta \mathrm{X}}.$$

3. Пусть B — банахово пространство, G — некоторая область, принадлежащая B, такая, что через любые две ее точки (t_1, x_1) и (t_2, x_2) проходит только одна экстремаль функционала (1′).

Тогда обычным образом можно ввести понятие геодезического расстояния (эйконала) l и вывести для него дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial l}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\delta l}{\delta x}\right) = 0. \tag{8}$$

Это нелинейное уравнение в функциональных производных первого порядка, которое не содержит неизвестный функционал, оно является аналогом уравнения Гамильтона — Якоби.

Каноническая система (5) представляет собой характеристическую систему для уравнения (8) (см. [4]).

Можно привести и ряд других результатов, аналогичных классическим, например, справедливо утверждение, аналогичное теореме Нетер.

Пусть функционал $\Phi[x(t)] = \int\limits_0^1 F(x(t), x'(t), t)\, dt$ инвариантен относительно преобразований

$$t^* = u(t, x, x't, \varepsilon) = t + \varepsilon u(t, \cdot, \cdot) + o(\varepsilon),$$
$$x^* = v(t, x, x't, \varepsilon) = x + \varepsilon v(t, \cdot, \cdot) + o(\varepsilon),$$

то

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\bar{v}(t), \frac{\delta F}{\delta x}\right) + F \cdot u(t, \cdot, \cdot)\right] = 0,$$

где

$$\bar{v}(t, \cdot, \cdot) = v(t, \cdot, \cdot) - (x'(t), u(t, \cdot, \cdot)).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ж. Дьедонне, Основы современного анализа, изд-во «Мир», М., 1964.
2. Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, изд-во «Мир», т. 1, 2, М., 1964.
3. Л. А. Люстерник и В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, изд-во «Наука», М., 1965.
4. Ю. Л. Далецкий и Н. М. Кухарчук, Уравнение первого порядка с функциональными производными, УМЖ, т. 17, № 6, 1965.

Поступила 19.X 1965 г.
Киев