О нелокальной теореме существования решения нелинейных гиперболических уравнений в гильбертовом пространстве

В. А. Погореленко, П. Е. Соболевский

1. Рассматривается задача

$$v'' + A(t)\,v = f(t, v, v') \quad (0 \leqslant t \leqslant T), \quad v(0) = v_0, \quad v'(0) = v_0' \tag{1}$$

в комплексном гильбертовом пространстве H.

Здесь $A(t)$ — самосопряженный положительно определенный оператор, действующий в H; f — некоторый нелинейный оператор; производные v', v'' понимаются как пределы по норме H соответствующих конечно-разностных отношений.

Функция $v(t)$ называется решением задачи (1), если при всех $t \in [0, T]$ она удовлетворяет (1) и функции v', v'' и $A(t)v$ непрерывны.

Будем предполагать, что оператор $A(t)$ при всех $t \in [0, T]$ имеет одну и ту же область определения $D(A(t)) = D_1$* и оператор-функция $A(t)A^{-1}(0)$ один раз сильно непрерывно дифференцируема.

Пусть нелинейный оператор $f(t, A^{-\frac{1}{2}}(0)\,v, w)$ непрерывно дифференцируем по совокупности переменных $t \in [0, T], v, w \in H$ и производные $\dfrac{\partial f}{\partial t}$,

* Как показал Гайнц [4], в этом случае все операторы $\mathbf{A}^{\varrho}(t)$ $(0 \leqslant \varrho \leqslant 1)$ имеют не зависящую от t область определения D_{ϱ}.

$\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial w}$ ограничены по совокупности t, v, w на каждом ограниченном множестве из $[0, T] \times H \times H$.

Наконец, пусть $v_0 \in D_1$, $v_0' \in D_{\frac{1}{2}}$.

При этих предположениях в [1] установлена локальная теорема существования для задачи (1). Методика, разработанная в указанной работе, позволяет доказывать нелокальные теоремы существования, если будет установлена априорная оценка

$$\| v'(t) \| + \| A^{\frac{1}{2}}(t) v(t) \| \leqslant C \qquad (0 \leqslant t \leqslant T). \tag{2}$$

Априорная оценка (2) для задачи (1) была установлена сначала для случая постоянного оператора $A(t) = A$ и потенциальной нелинейности f (см. [2] и имеющуюся там библиографию), затем в работе [3] был исследован случай переменного оператора $A(t)$.

В настоящей заметке методы работ [2], [3] обобщаются на более общий случай непотенциальных нелинейностей.

2. Теорема. *Пусть*

$$(A'(t)x, x) \leqslant \alpha(t)(A(t)x, x) \qquad (x \in D_1), \tag{3}$$

где $\alpha(t)$ — *непрерывная при* $t \geqslant 0$ *неотрицательная функция; пусть* $f(t, v, w) = f_1(t, v, w) - f_2(t, v)$,

$$2\,\mathrm{Re}\,(f, (t, x, y), y) \leqslant L(\| A^{\frac{1}{2}} x \|^2 + \| y \|^2) \qquad (x \in D_{\frac{1}{2}}, y \in H), \tag{4}$$

где $L(u)$ — *непрерывная при* $u \geqslant 0$ *неубывающая функция, такая, что задача*

$$\frac{du}{dt} = \alpha(t) u(t) + L(u(t)), \; u(0) = u_0 \tag{5}$$

имеет единственное решение, определенное при всех $t \geqslant 0$*; *пусть существует семейство неотрицательных функционалов* $F(t, v)$ $(0 \leqslant t \leqslant T, v \in D_{\frac{1}{2}})$ *таких, что для любой непрерывно дифференцируемой функции* $w(t)$ *скалярная функция* $F(t, A^{-\frac{1}{2}}(0) w(t))$ *непрерывно дифференцируема и справедливо неравенство*

$$\frac{d}{dt} F(t, A^{-\frac{1}{2}}(0) w(t)) \leqslant \alpha(t) F(t, A^{-\frac{1}{2}}(0) w(t)) +$$

$$+ 2\mathrm{Re}\,(f_2(t, A^{-\frac{1}{2}}(0) w(t)), A^{-\frac{1}{2}}(0) w'(t)). \tag{6}$$

Тогда для задачи (1) *справедлива нелокальная теорема существования.*

Доказательство. В силу сделанного выше замечания достаточно установить априорную оценку (2). Пусть существует решение задачи (1). Умножив тождество (1) скалярно на v' и взяв вещественную часть, получим

$$\frac{d}{dt}[\| v' \|^2 + \| A^{\frac{1}{2}} v \|^2] + 2\,\mathrm{Re}\,(f_2, v') = (A'(t) v, v) + 2\,\mathrm{Re}\,(f_1, v'). \tag{7}$$

---

* В качестве $L(u)$ может быть, например, взята функция, для которой $\int^{\infty} \frac{du}{L(u)} = \infty$.

Воспользовавшись (3), (4), (6), из (7) получаем

$$\frac{d}{dt}[\| v' \|^2 + \| A^{\frac{1}{2}} v \|^2 + F(t, v)] \leqslant d(t) [\| A^{\frac{1}{2}} v \|^2 + F(t, v)] + L(\| A^{\frac{1}{2}} v \|^2 + \| v' \|^2).$$

Пусть

$$z(t) = \| v' \|^2 + \| A^{\frac{1}{2}} v \|^2 + F(t, v).$$

Тогда из монотонности функции $L(u)$ следует, что $z(t)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$z'(t) \leqslant \alpha(t) z(t) + L(z(t)).$$

Отсюда и из теоремы о дифференциальных неравенствах вытекает оценка $z(t) \leqslant u(t)$, где $u(t)$ — решение задачи (5) при $u_0 = z(0)$. Априорная оценка (2) установлена.

Теорема доказана.

Замечание. В случае $f_1 \equiv 0$ теорема доказана в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Е. Соболевский, В. А. Погореленко, Гиперболические уравнения в гильбертовом пространстве, Сиб. матем. журн.
2. F. E. Browder, W. A. Strauss, Scattering for nonlinear wave equations, Repr. Pac. I. Math., **13**, № 1, 1963.
3. Я. Д. Мамедов, О некоторых свойствах решений нелинейных уравнений гиперболического типа в гильбертовом пространстве, ДАН СССР, т. 158, № 1, 1964.
4. E. Heinz, Beitrage zur Störungstheorie der Spektralzerlegung, Math. Ann., **123**, 1951, 415—438.

Поступила 7.IX 1965 г.
Воронеж