К вопросу о принципах подсчета числа графов

А. Е. Юрцунь

В настоящей работе, которая является продолжением [3], используются терминология Риге, основная теорема и понятие циклического индекса, приведенные в [1]. Выводится формула (4), выражающая число классов эквивалентности на множестве слов длины l над некоторым алфавитом X. Эквивалентность на множестве слов $S_l(X)$ индуцируется группой — продолжением (см. [1]) $\overline{H}_l$ группы H_l подстановок интервала $I_l = \{1, 2, \ldots, l\}$. Рассматривается вопрос определения значений функции $F(\varrho_m; \varrho)$ от такой пары разбиений ϱ_m, ϱ, что $\omega(\varrho_m) = \omega(\varrho) = l$, где $\omega(\varrho_m)$ —вес разбиения ϱ_m.

1. Пусть $S_l(X)$ — некоторое множество слов длины l над алфавитом X, $\overline{H}_l$ — продолжение группы H_l подстановок интервала I_l на множество $S_l(X)$, $e_{\overline{H}_l}$ — эквивалентность на множестве слов $S_l(X)$, индуцированная группой $\overline{H}_l$. Из [3] известно, что

$$\left|\frac{S_l(X)}{e_{\overline{H}_l}}\right| = \frac{1}{|H_l|}\sum_{h\in H_l} |S_{l,h}(X)|, \tag{1}$$

где $S_{l,h}(X) = \{m : m \in S_l(X),\ m^{-1}m \supset e_h\}$ и e_h, $m^{-1}m$ — эквивалентности на интервале I_l, индуцированные соответственно подстановкой $h \in H_l$ и словом $m \in S_l(X)$, рассматриваемым как однозначное отображение интервала I_l в алфавит X. Кроме того, для $M_\nu(X) = \{m : m \in S_l(X),\ \delta m = \nu\}$ и $M_{\nu,h}(X) = \{m : m \in M_\nu(X),\ m^{-1}m \supset e_h\}$ в [1] имеем

$$|M_{\nu,h}(X)| = F(\delta\nu;\ r[e_h]), \tag{2}$$

где ν — степень слова $m \in S_l(X)$, $\delta\nu = \delta\delta m$ — тип слова m, а $r[e_h]$ — разбиение, связанное с эквивалентностью e_h. Таким образом, имеем

$$|S_{l,h}(X)| = \sum_{q=1}^{\min\{l,|X|\}} \sum_{\substack{d(\varrho_m)=q\\ \omega(\varrho_m)=l}} \binom{|X|}{q}\cdot p(\varrho_m)\cdot F(\varrho_m; r[e_h]), \tag{3}$$

где $\varrho_m = r[m^{-1}m]$, $p(\varrho_m) = \dfrac{d(\varrho_m)!}{v(\varrho_m)}$.

П р е д л о ж е н и е 1. Если $S_l(X)$ — множество слов длины l над алфавитом X, $\overline{H}_l$ — продолжение группы H_l подстановок интервала I_l на множество $S_l(X)$, $e_{\overline{H}_l}$ — эквивалентность на множестве $S_l(X)$, индуцированная продолжением $\overline{H}_l$, то

$$\left|\frac{S_l(X)}{e_{\overline{H}_l}}\right| = \sum_{\omega(\varrho)=l} f_{H_l}(\varrho) \sum_{q=1}^{d(\varrho)} \binom{|X|}{q} \sum_{\substack{d(\varrho_m)=q \\ \omega(\varrho_m)=l}} p(\varrho_m)\cdot F(\varrho_m;\varrho), \tag{4}$$

где $f_{H_l}(\varrho)$ — циклический индекс группы подстановок H_l. Действительно, использовав формулу (3), получим:

$$\left|\frac{S_l(X)}{e_{\overline{H}_l}}\right| = \frac{1}{|H_l|}\sum_{h\in H_l}\sum_{q=1}^{l}\sum_{\substack{d(\varrho_m)=q \\ \omega(\varrho_m)=l}} \binom{|X|}{q} p(\varrho_m)\cdot F(\varrho_m; r[e_h]) =$$

$$= \frac{1}{|H_l|}\sum_{\omega(\varrho)=l}\sum_{r[e_h]=\varrho}\sum_{q=1}^{l}\sum_{\substack{d(\varrho_m)=q \\ \omega(\varrho_m)=l}} \binom{|X|}{q} p(\varrho_m)\cdot F(\varrho_m;\varrho) =$$

$$= \sum_{\omega(\varrho)=l}\frac{1}{|H_l|}\sum_{r[e_h]=\varrho}\sum_{q=1}^{l}\sum_{\substack{d(\varrho_m)=q \\ \omega(\varrho_m)=l}} \binom{|X|}{q}\cdot p(\varrho_m)\cdot F(\varrho_m;\varrho) =$$

$$= \sum_{\omega(\varrho)=l} f_{H_l}(\varrho)\sum_{q=1}^{l}\binom{|X|}{q}\sum_{\substack{d(\varrho_m)=q \\ \omega(\varrho_m)=l}} p(\varrho_m)\cdot F(\varrho_m;\varrho).$$

Так как из [1] известно, что $F(\varrho_m;\varrho)=0$ при $d(\varrho_m) > d(\varrho)$, то значения q берем от 1 до $d(\varrho) \leqslant |X|$, и окончательно имеем:

$$\left|\frac{S_l(X)}{e_{\overline{H}_l}}\right| = \sum_{\omega(\varrho)=l} f_{H_l}(\varrho)\sum_{q=1}^{d(\varrho)}\binom{|X|}{q}\sum_{\substack{d(\varrho_m)=q \\ \omega(\varrho_m)=l}} p(\varrho_m)\cdot F(\varrho_m;\varrho).$$

2. Таким образом, при использовании формулы (4), если записаны все возможные разбиения веса l и известный циклический индекс $f_{H_l}(\varrho)$ группы H_l, решающим является числовое значение функции $F(\varrho_m;\varrho)$.

Рассмотрим способ определения функции $F(\varrho_m;\varrho)$ при $\omega(\varrho_m)=\omega(\varrho)=l$ в случаях, когда а) $d(\varrho_m) > d(\varrho)$ и б) $d(\varrho_m) \leqslant d(\varrho)$.

Каждое разбиение $\varrho = \{\lambda_i^{\alpha_i}\}$ $i = 1, 2, \ldots, s$ будем рассматривать как конечное множество $M = \{\lambda_i\}$ натуральных чисел (где каждое λ_i взято α_i раз), сумма которых равна $\omega(\varrho)=l$, а $|M| = |\{\lambda_i\}| = d(\varrho)$. Таким образом, каждая пара разбиений $(\varrho_m;\varrho)$ может быть представлена двумя множествами $M_1 = \{\lambda_i\}$ и $M_2 = \{\lambda_j\}$ натуральных чисел, такими, что сумма элементов каждого множества равна $\omega(\varrho_m)=\omega(\varrho)=l$, а $|M_1| = |\{\lambda_i\}| = d(\varrho_m)$, $|M_2| = |\{\lambda_j\}| = d(\varrho)$. Справедливо

Предложение 2. Для каждой пары разбиений $(\varrho_m;\varrho)$ такой, что $\omega(\varrho_m)=\omega(\varrho)=l$, значение функции $F(\varrho_m;\varrho)\neq 0$ тогда и только тогда, когда элементы представляющих множеств $M_1=\{\lambda_i\}$ и $M_2=\{\lambda_j\}$ удовлетворяют следующим условиям: 1) $|\lambda_j| \leqslant |\lambda_i|$, 2) каждое $|\lambda_i|$ равно сумме некоторых элементов $b_i \in M_2$ $\left(\text{т. е. } |\lambda_i| = \sum b_j,\ b_j \in M_2\right)$.

Действительно, пусть $F(\varrho_m;\varrho)\neq 0$, тогда существует хотя бы одно слово $m \in M_\nu(X)$ степени ν и типа $\delta\nu = \varrho_m$ такое, что $m^{-1}m \supset e_h$, где

$r[e_h]=\varrho$, $r[m^{-1}m]=\varrho_m$. Это значит, во-первых, что классы эквивалентности e_h имеют мощность $|\lambda_j|\leqslant|\lambda_i|$ (где $|\lambda_i|$ — мощность классов эквивалентности $m^{-1}m$); таким образом каждый класс эквивалентности $m^{-1}m$ включает в себя один или несколько классов эквивалентности e_h, тогда каждое $|\lambda_i|$ равно сумме некоторых $b_j\in M_2$. Наоборот, если для некоторой пары разбиений $(\varrho_m;\varrho)$ таких, что $\omega(\varrho_m)=\omega(\varrho)=l$ выполняются условия 1) и 2) предложения 2, то, очевидно, $F(\varrho_m;\varrho)\neq 0$.

Теперь ясно (как уже упоминалось в п. 1), что в случае $d(\varrho_m)>d(\varrho)$ всегда $F(\varrho_m;\varrho)=0$, ибо не выполняется условие 1) предложения 2. В случае, когда $d(\varrho_m)=d(\varrho)$ и $\varrho_m\neq\varrho$, тоже всегда $F(\varrho_m;\varrho)=0$ (не выполняется условие 2). Если же $\varrho_m=\varrho$ и $d(\varrho_m)=d(\varrho)$, то, как легко видеть,

$$F(\varrho_m;\varrho)=v(\varrho_m)=v(\varrho)=\prod_{i=1}^{s}\alpha_i!.$$

Пусть теперь имеем $F(\varrho_m;\varrho)\neq 0$. Для определения значения функции $F(\varrho_m;\varrho)$ введем понятие «разности» разбиений ϱ_m и ϱ следующим образом:

Определение. *Разностью двух разбиений ϱ_m и ϱ, при $\omega(\varrho_m)=\omega(\varrho)$ и $d(\varrho_m)<d(\varrho)$, будем называть совокупность разбиений $\{\varrho'\}$, получаемых при вычитании всех $\lambda_j\neq 1$ от кратных λ_i, т. е. таких, что $\omega(\varrho')=\omega(\varrho_m)-\omega(\varrho_1)$, где ϱ_1 — разбиение, полученное из ϱ удалением пары 1^{α_1} (если она имеется).*

Используя представляющие множества $M_1=\{\lambda_i\}$ и $M_2=\{\lambda_j\}$ разбиений ϱ_m и ϱ легко показать получение разности их как совокупности разбиений $\{\varrho'\}$. Действительно, так как $F(\varrho_m;\varrho)\neq 0$, то элементы множеств M_1 и M_2 удовлетворяют условиям 1) и 2) предложения 2. Таким образом, все элементы λ_i множества M_1 можно записать в виде представляющих их сумм некоторых элементов множества M_2, и таких представляющих сумм для данной пары $(\varrho_m;\varrho)$ может быть несколько.

Например, пусть имеем $\varrho_m=(1,3,4)$, $\varrho=(1^3,2,3)$, где $d(\varrho_m)=3$, $d(\varrho)=5$, $d(\varrho_m)<d(\varrho)$, $\omega(\varrho_m)=\omega(\varrho)=8$, $M_1=\{1,3,4\}$, $M_2=\{1,1,1,2,3\}$. Условия 1) и 2) предложения 2 удовлетворяются. Представляющие суммы элементов множества M_1, элементами множества M_2 будут: $1\to 1$, $3\to 1+2$, $4\to 1+3$, откуда получим $\varrho_1'=1,1,1=(1^3)$; $1\to 1$, $3\to 3$, $4\to 1+1+2$, откуда имеем $\varrho_2'=(1,2)$ и, кроме того, $\omega(\varrho_1')=\omega(\varrho_2')=\omega(\varrho_m)-\omega(\varrho_1)=8-5=3$. Очевидно,

Предложение 3.

$$F(\varrho_m;\varrho)=\sum_{\varrho'}c(\varrho'),\quad \text{где}\quad c(\varrho')=\frac{\omega(\varrho')!}{\prod\limits_{k=1}(\lambda_k!)^{\alpha_k}}.$$

Примеры:

1) $F(1^3,2,3;1,2,5)=0$, ибо $d(\varrho_m)=5$, $d(\varrho)=3$ и $d(\varrho_m)>d(\varrho)$;
2) $F(1^2,6;1,3,4)=0$, ибо $6\neq\sum b_j$, $b_j\in\{1,3,4\}$;
3) $F(1^3,2,3;1^3,2,3)=3!\cdot 1!\cdot 1!=6$, так как $d(\varrho_m)=d(\varrho)$, $\varrho_m=\varrho$;
4) $F(2,3^2;3,5)=0$, ибо $|\lambda_j|>|\lambda_i|$;
5) $F(1^3,5;1^4,2^2)=c(1^4)=24$, так как $1^3,5-2^2=1^3,1=(1^4)$;
6) $F(3,5;1^4,2^2)=3\cdot c(1,3)=3\cdot 4=12$;
7) $F(1,3,4;1^4,2^2)=c(1,3)+2\cdot c(1^2,2)=4+24=28$;
8) $F(1,2^2,3;1^4,2^2)=2\cdot c(1,3)+4\cdot c(1^2,2)=8+48=56$;
9) $F(1,3,4;1^3,2,3)=c(1^3)+c(1,2)=6+3=9$;
10) $F(4^2;1^4,4)=2\cdot c(4^1)=2\cdot 1=2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Берж, Теория графов и ее применение, ИЛ, М., 1962.
2. Дж. Риордан, Введение в комбинаторный анализ, ИЛ, М., 1963.
3. А. Е. Юрцунь, О принципах подсчета числа графов, УМЖ, т. 18, № 5, 1966.

Поступила 5.IX 1966 г., Киев