Предельное поведение распределений решения стохастического диффузионного уравнения

Г. Л. Кулинич

Рассмотрим стохастическое диффузионное уравнение (см. [1], гл. 5, § 1)

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t))\,dt + \sigma(t, \xi(t))\,dw(t), \tag{1}$$

решение которого будет диффузионным процессом с коэффициентом диффузии $\sigma^2(t, x)$ и коэффициентом сноса $a(t, x)$. Предположим, что $t \geqslant 0$, а $x \in (-\infty, \infty)$.

Уравнение (1) эквивалентно следующему уравнению:

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(s, \xi(s))\,ds + \int_0^t \sigma(s, \xi(s))\,dw(s), \tag{2}$$

где $\xi(0)$ — заданная случайная величина независимая от процесса броуновского движения $w(t)$.

В однородном случае (см. [2], гл. 11, § 2) уравнение (2) имеет вид

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(\xi(s))\, ds + \int_0^t \sigma(\xi(s))\, dw(s). \tag{2'}$$

В настоящей работе при определенных условиях на $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ доказывается асимптотическая нормальность распределений случайных величин $\frac{\xi(t)}{\sqrt{t}}$, где $\xi(t)$ — решение уравнения (2) или (2').

Теорема 1. *Пусть $\xi(t)$ — решение уравнения (2'), если*

1) $a(x)$, $\sigma(x)$, $\sigma'(x)$ —*непрерывные ограниченные функции*, $\sigma(x) \geqslant \delta > 0$ *и для любых* $x, y \in (-\infty, \infty)$

$$|a(x) - a(y)| \leqslant K|x - y|, \qquad |\sigma'(x) - \sigma'(y)| \leqslant K|x - y|,$$

где K — некоторая постоянная;

2)

$$\frac{1}{y}\int_0^y \frac{1}{\sigma(u)}\, du \to \sigma_0 \tag{3}$$

при $y \to \infty$;

3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{a(u)}{\sigma^2(u)} - \frac{1}{2}\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}\right] du = 0, \tag{4}$$

то распределение случайной величины $\frac{\xi(t)}{\sqrt{t}}$ *при* $t \to \infty$ *асимптотически нормально с параметрами* $\left(0, \frac{1}{\sigma_0}\right)$.

Доказательство. Введем функцию

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sigma(u)}\, du$$

и рассмотрим процесс $\eta(t) = f(\xi(t))$. По формуле Ито (см. [1], гл. 2, § 2) можем записать стохастический дифференциал

$$d\eta(t) = \left[\frac{a(\xi(t))}{\sigma(\xi(t))} - \frac{1}{2}\sigma'(\xi(t))\right] dt + dw(t).$$

Так как функция $f(x)$ непрерывная и монотонная, то она имеет обратную функцию $\varphi(x)$. Тогда получаем стохастическое диффузионное уравнение

$$d\eta(t) = \tilde{a}(\eta(t))\, dt + dw(t),$$

где

$$\tilde{a}(x) = \frac{a(\varphi(x))}{\sigma(\varphi(x))} - \frac{1}{2}\sigma'(\varphi(x)).$$

Параболическое дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \tilde{a}(x)\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}$$

имеет единственное фундаментальное решение $q(t, x, y)$, которое удовлетворяет неравенству (см. [2], теорема 0.5) при любых $x, y \in (-\infty, \infty)$ и $t \geqslant 0$

$$q(t, x, y) \leqslant \frac{N}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\alpha(x-y)^2}{t}}, \tag{5}$$

где N, α — некоторые положительные постоянные.

Функция $q(t, x, y)$ совпадает с переходной плотностью $\varrho(t, x, y)$ (см. [2], гл. 5, § 6) процесса

$$\eta(t) = \eta(0) + \int_0^t \widetilde{a}(\eta(s))\, ds + w(t).$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что выражение

$$\frac{\eta(t) - w(t)}{\sqrt{t}} = \frac{\eta(0)}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t \widetilde{a}(\eta(s))\, ds$$

сходится по вероятности к нулю.

Введем функцию

$$g(x) = 1 + C \cdot \exp\left\{-2 \int_0^x \widetilde{a}(u)\, du\right\},$$

где C — произвольная постоянная. Тогда, пользуясь формулой Ито, получим

$$\int_0^t \widetilde{\alpha}(\eta(s))\, ds = \int_0^{\eta(t)} g(x)\, dx - \int_0^t (g(\eta(s))\, dw(s) - \int_0^{\eta(0)} g(x)\, dx.$$

Поэтому для каждого $x \in (-\infty, \infty)$

$$P_x\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\left|\int_0^t \widetilde{a}(\eta(s))\, ds\right| > \varepsilon\right\} \leqslant \frac{8}{\varepsilon^2 t} M_x\left[\int_0^{\eta(t)} g(u)\, du\right]^2 + \frac{8}{\varepsilon^2 t} \int_0^t M_x\, [g(\eta(s))]^2\, ds.$$

Из (3) и (4) следует, что можно подобрать такую постоянную C, чтобы $g(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$.

Так как $g(x)$ — непрерывная ограниченная функция и стремится к нулю при $|x| \to \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$, существует такое M_ε, что если $|y| \geqslant M_\varepsilon$, то

$$\left|\frac{1}{y} \int_0^y g(u)\, du\right| < \varepsilon.$$

Итак, используя (5), имеем

$$M_x\left[\int_0^{\eta(t)} g(u)\, du\right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^y g(u)\, du\right]^2 \varrho(t, x, y)\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{N}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^y g(u)\, du\right]^2 \exp\left\{-\frac{\alpha(x-y)^2}{t}\right\} dy =$$

$$= \frac{N}{\sqrt{t}} \int\limits_{|y| \leqslant M_\varepsilon} \left[\int\limits_0^y g(u)\, du \right]^2 \exp\left\{ -\frac{\alpha (x-y)^2}{t} \right\} dy +$$

$$+ \frac{N}{\sqrt{t}} \int\limits_{|y| > M_\varepsilon} \left[\int\limits_0^y g(u)\, du \right]^2 \exp\left\{ -\frac{\alpha (x-y)^2}{t} \right\} dy \leqslant \frac{C_\varepsilon}{\sqrt{t}} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \sqrt{t}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{t} M_x \left[\int\limits_0^{\eta(t)} g(u)\, du \right]^2 \to 0$$

при $t \to \infty$. Аналогично, можно показать, что

$$M_x [g(\eta(s))]^2 \to 0$$

при $s \to \infty$. Потому

$$\frac{1}{t} \int\limits_0^t M_x [g(\eta(s))]^2\, ds \to 0.$$

Значит,

$$\frac{\eta(t) - w(t)}{\sqrt{t}} \to 0$$

по вероятности при $t \to \infty$. Отсюда следует, что распределение случайных величин $\frac{\eta(t)}{\sqrt{t}}$ асимптотически нормально с параметрами (0, 1). Поэтому процесс $\eta(t)$ неограничен по вероятности, т. е. для любой постоянной C

$$P\{|\eta(t)| \leqslant C\} \to 0$$

при $t \to \infty$, а, следовательно, и $\xi(t)$ неограничен по вероятности, так как $\frac{f(x)}{x} \to \sigma_0$ при $|x| \to \infty$.

Поскольку для любого $\varepsilon > 0$ существует такое C_ε, что как только $|x| > C_\varepsilon$, то $\left| \frac{f(x)}{x} - \sigma_0 \right| < \varepsilon$, имеем

$$P\left\{ \left| \frac{\eta(t)}{\xi(t)} - \sigma_0 \right| > \varepsilon \right\} \leqslant P\{|\xi(t)| \leqslant C_\varepsilon\} \to 0$$

при $t \to \infty$, т. е.

$$\frac{\eta(t)}{\xi(t)} \to \sigma_0$$

по вероятности. Из соотношения

$$\frac{\xi(t)}{\sqrt{t}} = \frac{\xi(t)}{\eta(t)} \cdot \frac{\eta(t)}{\sqrt{t}}$$

следует утверждение теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $\xi(t)$ — *решение уравнения* (2), *если*

1) $a(t, x)$, $\sigma(t, x)$, $a'_x(t, x)$, $a''_{xx}(t, x)$, $\sigma'_x(t, x)$, $\sigma''_{xx}(t, x)$ — *непрерывны и ограничены в области* ($t \geqslant 0$, $(-\infty, \infty)$), $\sigma(t, x) \geqslant \delta > 0$;

2) *для любых* t_1 *и* t_2

$$|\sigma(t_1\, x) - \sigma(t_2, x)| \leqslant K |t_1 - t_2|^\lambda,$$

где $\lambda > 0$;

3) *для произвольной постоянной* $\alpha > 0$ *и любого* $x \in (-\infty, \infty)$

$$\frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} |a(s, y)| \exp\left\{-\frac{\alpha (x-y)^2}{s}\right\} dy = o\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)$$

при достаточно больших s;

4) *существует постоянная* σ_0, *что*

$$\frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{\infty} [\sigma(s, y) - \sigma_0]^2 \exp\left\{-\frac{\alpha (x-y)^2}{s}\right\} dy \to 0$$

при $s \to \infty$.

Тогда случайная величина $\frac{\xi(t)}{\sqrt{t}}$ *имеет асимптотическое нормальное распределение с параметрами* $(0, \sigma_0)$.

Доказательство. Рассмотрим параболическое дифференциальное уравнение

$$-\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = a(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}. \tag{6}$$

Оно имеет единственное фундаментальное решение $q(t, x, s, y)$ (см. [2], замечание к теореме 0.4) и для любых $0 \leqslant t < s < \infty$

$$q(t, x, s, y) \leqslant \frac{N}{\sqrt{s-t}} \exp\left\{-\frac{\alpha (x-y)^2}{s-t}\right\},$$

где N, α — некоторые положительные постоянные.

Функция

$$v(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\, q(t, x, s, y)\, dy,$$

где $\varphi(x)$ — финитная дважды непрерывнодифференцируемая функция, есть ограниченное решение задачи Коши для уравнения (6) в области $([0, s] \times \times (-\infty, \infty))$ для $s < \infty$ с условием $v(s, x) = \varphi(x)$, а, следовательно, (см. [4], § 1, теорема 10) оно единственно. С другой стороны, функция

$$u(t, x) = M_{t,x} \varphi(\xi(s))$$

удовлетворяет уравнению (6) и условию $u(s, x) = \varphi(x)$ (см. [3]. гл. 8, § 5). Значит, для любого x и $t < s$

$$M_{t,x} \varphi(\xi(s)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\, q(t, x, s, y)\, dy$$

для финитных дважды непрерывнодифференцируемых функций $\varphi(x)$, а поэтому $q(t, x, s, y)$ совпадает с переходной плотностью $\varrho(t, x, s, y)$ процесса $\xi(t)$.

Из (2) имеем

$$\frac{\xi(t) - \sigma_0 w(t)}{\sqrt{t}} = \frac{\xi(0)}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t a(s, \xi(s))\, ds +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t [\sigma(s, \xi(s)) - \sigma_0]\, dw(s).$$

Тогда

$$P_x\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\left|\int_0^t a(s,\xi(s))\,ds\right|>\varepsilon\right\}\leqslant\frac{1}{\varepsilon\sqrt{t}}M_x\left|\int_0^t a(s,\xi(s))\,ds\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon\sqrt{t}}\int_0^t M_x\,|a(s,\xi(s))|\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\frac{N}{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\int_{-\infty}^{\infty}|a(s,y)|\exp\left\{-\frac{\alpha(x-y)^2}{s}\right\}dy\right)ds\to 0$$

при $t\to\infty$, так как $\frac{1}{\sqrt{s}}\int_{-\infty}^{\infty}|a(s,y)|\exp\left\{-\frac{\alpha(x-y)^2}{s}\right\}dx$ ограниченная функция и стремится к нулю при $s\to\infty$.

Аналогично, получим

$$P_x\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\left|\int_0^t[\sigma(s,\xi(s))-\sigma_0]\,dw(s)\right|>\varepsilon\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2 t}\int_0^t M_x[\sigma(s,\xi(s))-\sigma_0]^2\,ds\to 0$$

при $t\to\infty$. Следовательно,

$$\frac{\xi(t)-\sigma_0 w(t)}{\sqrt{t}}\to 0$$

по вероятности, значит, $\frac{\xi(t)}{\sqrt{t}}$ имеет асимптотическое нормальное распределение с параметрами $(0,\sigma_0)$.

Теорема 3. *Пусть $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — решения уравнений*

$$\xi_i(t)=\xi_i(0)+\int_0^t a_i(s,\xi_i(s))\,ds+\int_0^t\sigma(s,\xi_i(s))\,dw(s),$$

$$i=1,\ 2,$$

если

1) *$a_1(t,x)$, $a_2(t,x)$, $\sigma(t,x)$ удовлетворяют условиям теоремы 2 и $a_1(t,x)<a_2(t,x)$ при любых t и x;*

2)

$$P\{\xi_1(0)\leqslant\xi(0)\leqslant\xi_2(0)\}=1$$

и

$$a_1(t,x)<a(t,x)<a_2(t,x),$$

то случайная величина $\frac{\xi(t)}{\sqrt{t}}$ имеет асимптотически нормальное распределение с параметрами $(0,\sigma_0)$, где $\xi(t)$ — решение уравнения

$$\xi(t)=\xi(0)+\int_0^t a(s,\xi(s))\,ds+\int_0^t\sigma(s,\xi(s))\,dw(s).$$

Доказательство этой теоремы следует из (см. [1], гл. 5, § 3,) и теоремы 2.

В заключение автор выражает благодарность А. В. Скороходу за помощь при написании работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Скороход, Исследования по теории случайных процессов, изд-во Киевск. гос. ун-та, К., 1961.
2. Е. Б. Дынкин, Марковские процессы, Физматгиз, М., 1963.
3. И. И. Гихман, А. В. Скороход, Введение в теорию случайных процессов, изд-во «Наука», 1965.
4. А. М. Ильин, А. С. Калашников, О. А. Олейник, Линейные уравнения второго порядка параболического типа, УМН, т. 17, вып. 3, 1962.

Поступила 4.II 1966 г.
Киев