О методе усреднения в теории конечно-разностных уравнений

Е. П. Белан

В настоящей заметке рассматривается вопрос применимости известного метода усреднения [1] для одного класса конечно-разностных уравнений на интервале длины порядка $\frac{1}{\varepsilon}$. Существование почти периодического решения таких систем в окрестности статического решения усредненных систем рассмотрено в [2]. Полученный результат формулируется в виде теоремы, обосновывающей применимость метода на интервале длины порядка $\frac{1}{\varepsilon}$.

Рассматривается система конечно-разностных уравнений

$$\Delta x[n] = \varepsilon X(x[n], n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где x, X — точки m-мерного эвклидова пространства, ε — малый положительный параметр, $\Delta x[n] = x[n+1] - x[n]$. Соответствующей ей усредненной системой является

$$\Delta \xi[n] = \varepsilon X_0(\xi[n]), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где

$$X_0(x) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{\gamma=0}^{N} X(x, \gamma).$$

Вопрос о близости решений точной и усредненной систем на интервале длины порядка $\frac{1}{\varepsilon}$ решает теорема.

Теорема. *Пусть функция $X(x, n)$ в некоторой области D удовлетворяет следующим условиям.*

1. *Для всех $n \geqslant 0$ и для любых точек $x, x', x'' \in D$ существуют такие положительные M и λ, что*

$$|X(x, n)| \leqslant M, \qquad |X(x', n) - X(x'', n)| \leqslant \lambda |x' - x''|. \tag{3}$$

2. *Существует такое $X_0(x)$, что равномерно по x в области D*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \left| \sum_{\gamma=0}^{N} \{X(x, \gamma) - X_0(x)\} \right| = 0. \tag{4}$$

Тогда, если $\xi[n]$ — решение уравнения (2), определенное для всех $n \geqslant 0$ и принадлежащее вместе со своей ϱ-окрестностью области D, а $x[n]$ — решение системы (1), имеющее с $\xi[n]$ одинаковые начальные значения, то *для любых* $\eta > 0$, $\varrho > 0$, $L > 0$ *можно указать такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что для* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *при* $0 \leqslant n \leqslant E\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)$.

$$|x[n] - \xi[n]| < \eta.$$

Доказательство. Из условия (4) вытекает существование такой монотонно убывающей функции $f[n]$ при $n \to \infty$, для которой справедливо неравенство

$$\left|\sum_{\gamma=0}^{n} X(x[n], \gamma) - X_0(x[n])\right| \leqslant nf[n].$$

Обозначим

$$F(\varepsilon) = \sup_{n<L}\left| nfE\left[\frac{n}{\varepsilon}\right]\right|. \tag{5}$$

Очевидно, $F(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и либо

$$1)\ \frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon} \leqslant A, \quad \text{либо} \quad 2)\ \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon} = \infty. \tag{6}$$

В соответствии с этими двумя случаями существует такое ε_0 (для каждого из следующих ниже неравенств оно будет свое), что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ выполняются неравенства

$$\begin{gathered}
1)\quad \sqrt{\varepsilon}\, M + \frac{2M}{\lambda}\sqrt{\varepsilon} + \frac{2A}{\lambda}\sqrt{\varepsilon} + F(\varepsilon) + 2M\varepsilon < \frac{\delta}{2e^{L\lambda}}, \\
2)\quad MF(\varepsilon) + \frac{2M\varepsilon}{\sqrt{F(\varepsilon)}\,\lambda} + \frac{2\sqrt{F(\varepsilon)}}{\lambda} + F(\varepsilon) + 2M\varepsilon < \frac{\delta}{2e^{L\lambda}}, \\
\sqrt{F(\varepsilon)} > 2\varepsilon, \qquad \delta = \min(\varrho, \eta).
\end{gathered} \tag{7}$$

Рассмотрим функцию

$$\bar{x}[n] = \xi[n] + \frac{\varepsilon}{a+2} \sum_{i=n-1}^{n+E(a)} \sum_{\gamma=0}^{n-1} \{X(\xi[i], \gamma) - X_0(\xi[i])\}$$

(a — постоянная, пока что неопределенная величина), которая имеет с $\xi[n]$ одинаковые начальные значения и принадлежит ее ϱ-окрестности для $n \leqslant E\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)$, так как

$$\left|\frac{\varepsilon}{a+2} \sum_{i=n-1}^{n+E(a)} \sum_{\gamma=0}^{n-1} \{X(\xi[i], \gamma] - X_0(\xi[i])\}\right| \leqslant \frac{2+E(a)}{2+a} F(\varepsilon) \leqslant F(\varepsilon) < \varrho.$$

Выбранная в таком виде функция представляет дискретный аналог функции, выбираемой при доказательстве соответствующей теоремы для дифференциальных уравнений [3]. Непосредственной подстановкой нетрудно показать, что $\bar{x}[n]$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\bar{x}[n] = \varepsilon X(\bar{x}[n], n) + R[n], \tag{8}$$

где

$$R[n] = \Delta\xi[n] + \frac{\varepsilon}{a+2} \sum_{i=n}^{n+1+E(a)} \{X(\xi[i], n) - X_0(\xi[i])\} +$$

$$+\frac{\varepsilon}{a+2}\sum_{\gamma=0}^{n-1}\{X(\xi[n+1+E(a)],\gamma)-X_0(\xi[n+1+E(a)]\}-$$

$$-\frac{\varepsilon}{a+2}\sum_{\gamma=0}^{n-1}\{X(\xi[n-1],\nu)-X_0(\xi[n-1])\}-$$

$$-\varepsilon X\left(\xi[n]+\frac{\varepsilon}{a+2}\sum_{i=n-1}^{n+E(a)}\sum_{\gamma=0}^{n-1}\{X(\xi[i],\gamma)-X_0(\xi[i])\},n\right)+$$

$$+\varepsilon X(\xi[n],n)-\varepsilon X(\xi[n],n).$$

Очевидно,

$$|R[n]|\leqslant\Bigg|\varepsilon X_0(\xi[n])-\varepsilon X[\xi[n],n)+$$

$$+\frac{\varepsilon}{a+2}\sum_{i=n}^{n+1+E(a)}\{X(\xi[i],n)-X_0(\xi[i])\}\Bigg|+$$

$$+\left|\frac{\varepsilon}{a+2}\sum_{\gamma=0}^{n-1}\{X(\xi[n+1+E(a)],\gamma)-X_0(\xi[n+1+E(a)]\}\right|+$$

$$+\left|\frac{\varepsilon}{a+2}\sum_{\gamma=0}^{n-1}\{X(\xi[n-1],\gamma)-X_0(\xi[n-1])\}\right|+$$

$$+\left|\varepsilon X\left(\xi[n]+\frac{\varepsilon}{a+2}\sum_{i=n-1}^{n+E(a)}\sum_{\gamma=0}^{n-1}\{X(\xi[i],\gamma)-X_0(\xi[i])\},n\right)-\varepsilon X(\xi[n],n)\right|. \tag{9}$$

Очевидно, что

$$\left|\varepsilon X_0(\xi[n])-\varepsilon X(\xi[n],n)+\frac{\varepsilon}{a+2}\sum_{i=n}^{n+1+E(a)}\{X(\xi([i],n)-X_0(\xi[i])\}\right|<$$

$$<\left|\frac{\varepsilon}{a+2}\sum_{i=n}^{n+E(a)+1}X(\xi[i],n)-X(\xi[n],n)\right|+$$

$$+\left|\frac{\varepsilon}{a+2}\sum_{i=n}^{n+E(a)+1}X_0(\xi[i])-X_0(\xi[n])\right|+$$

$$+\left|\frac{\varepsilon}{(E(a)+2)(a+2)}\sum_{i=n}^{n+E(a)+1}X(\xi[i],n)-X_0(\xi[i])\right|. \tag{10}$$

На основании неравенства (3) теоремы, получаем:

$$\left|\frac{\varepsilon}{a+2}\sum_{i=n}^{n+E(a)+1}X(\xi[i],n)-X(\xi[n],n))\right|<\frac{\varepsilon}{a+2}\sum_{i=n}^{n+E(a)+1}\lambda|\xi[i]-\xi[n]|. \tag{11}$$

Поскольку $\xi[n]$ — решение (2), то

$$|\xi[i] - \xi[n]| \leqslant \varepsilon \sum_{\gamma=n-1}^{i} |X_0(\xi[\gamma])| < \varepsilon M |i-n|.$$

Подставляя полученное неравенство в неравенство (11), имеем

$$\left| \frac{\varepsilon}{a+2} \sum_{i=n}^{n+E(a)+1} X(\xi[i], n) - X(\xi[n], n) \right| \leqslant \varepsilon^2 \lambda M \frac{a+2}{2}.$$

Ясно, что второй член правой части неравенства (9) оценивается точн так же. Очевидно,

$$\left| \frac{\varepsilon}{(E(a)+2)(a+2)} \sum_{i=n}^{n+E(a)+1} X(\xi[i], n) - X_0(\xi[i]) \right| \leqslant \frac{2\varepsilon M}{a+2}.$$

Сумма оценок второго и третьего выражений в (9) по определению F (ε не превышает $\frac{2F(\varepsilon)}{a+2}$. Легко получить оценку и для последнего слагаемог в (9); она равна $\varepsilon\lambda F(\varepsilon)$.

Таким образом,

$$|R[n]| \leqslant \varepsilon^2 \lambda M (a+2) + \frac{2\varepsilon M}{a+2} + \frac{2F(\varepsilon)}{a+2} + \varepsilon\lambda F(\varepsilon).$$

Это позволяет записать следующее неравенство:

$$\left| \sum_{\gamma=0}^{n-1} R[\gamma](1+\varepsilon\nu)^{n-\gamma-1} \right| \leqslant \left(\varepsilon M(a+2) + \frac{2M}{(a+2)\lambda} + \frac{2F(\varepsilon)}{\varepsilon(a+2)\lambda} + F(\varepsilon) \right) e^{\lambda L}.$$

Определяя произвольную величину a соответственно для случаев 1), 2) (6) равенствами

$$1)\quad a+2 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \qquad 2)\quad a+2 = \frac{\sqrt{F(\varepsilon)}}{\varepsilon},$$

получаем

$$\left| \sum_{\gamma=0}^{n-1} R[\gamma](1+\varepsilon\gamma)^{n-\gamma-1} \right| < \frac{\delta}{2} \quad \text{для} \quad n \leqslant E\left(\frac{L}{\varepsilon}\right).$$

Из определения δ (7) ясно, что

$$\left| \sum_{\gamma=0}^{n-1} R[\gamma](1+\varepsilon\gamma)^{n-\gamma-1} \right| < \frac{\eta}{2},$$

$$\left| \sum_{\gamma=0}^{n-1} R[\gamma](1+\varepsilon\gamma)^{n-\gamma-1} \right| < \frac{\varrho}{2}. \tag{12}$$

Пусть $x[n]$ — решение уравнения (1), причем $x[0] = \xi[0]$. Тогда в промежутке

$$0 \leqslant n \leqslant n^*, \qquad n^* \leqslant \varepsilon\left(\frac{L}{\varepsilon}\right), \tag{13}$$

для которого $x[n] \in D$,

$$|\Delta(x[n]-\bar{x}[n])| \leqslant \lambda\varepsilon\,|x[n]-\bar{x}[n]| + |R[n]|.$$

Отсюда видно, что

$$|x[n]-\bar{x}[n]| \leqslant \left|\sum_{\gamma=0}^{n-1} R[\gamma](1+\varepsilon\lambda)^{n-\gamma-1}\right|,$$

т. е. для всех n, удовлетворяющих условию (13), имеют место неравенства

$$\begin{gathered} |x[n]-\xi[n]| < \frac{\eta}{2} + F(\varepsilon) < \eta, \\ |x[n]-\xi[n]| < \frac{\varrho}{2} + F(\varepsilon) < \varrho. \end{gathered} \tag{14}$$

Покажем, что n^* можно взять равным $E\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)$. Пусть $x[n] \in D$. Из уравнений (1), (2) легко получить, что

$$|x[n+1]-\xi[n+1]| \leqslant 2\varepsilon M + |x[n]-\xi[n]|. \tag{15}$$

Предположим, что равенство $n^* = E\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)$ не может иметь места. В таком случае

$$|x[n]-\xi[n]| < \varrho \tag{16}$$

не может выполняться для всех n, принадлежащих $\left[0,\ E\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)\right]$, так как в последнем случае мы имели бы $x[n] \in D$ для всех n, $0 \leqslant n \leqslant E\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)$. Итак, существует такое $\bar{n}$, что

$$|x[\bar{n}+1]-\xi[\bar{n}+1]| \geqslant \varrho, \tag{17}$$

в то время как для всех $0 \leqslant n \leqslant \bar{n}$ справедливо (16). В частности

$$|x[\bar{n}]-\xi[\bar{n}]| < \varrho. \tag{18}$$

Так как $x[n] \in D$, то на основании (15) имеем

$$|x[\bar{n}+1]-\xi[\bar{n}+1]| \leqslant |x[\bar{n}]-\xi[n]| + 2\varepsilon M,$$

т. е., принимая во внимание (17),

$$|x[\bar{n}]-\xi[\bar{n}]| \geqslant \varrho - 2\varepsilon M. \tag{19}$$

Согласно условиям (7)

$$F(\varepsilon) < \frac{\delta}{2} - 2M\varepsilon \leqslant \frac{\varrho}{2} - 2M\varepsilon. \tag{20}$$

Положим теперь $n^* = \bar{n}$, что возможно, так как $x[\bar{n}] \in D$. Но тогда в силу (14) и (20) получим

$$|x[\bar{n}]-\xi[\bar{n}]| < \frac{\varrho}{2} + F(\varepsilon) < \varrho - 2M\varepsilon,$$

что противоречит (19).

Итак, мы можем положить $n^* = E\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)$ и неравенства (14) будут справедливы в промежутке $0 \leqslant n \leqslant E\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)$, что и завершает доказательство теоремы.

Замечание. Как показано в работе [2], система

$$x[n+1] = A[n]x[n] + \varepsilon X(n, x[n]) \tag{21}$$

при условии существования A^{-1} может быть приведена к виду

$$z[n+1] = z[n] + \varepsilon Z(n, z[n]),$$

т. е. доказанную теорему можно сформулировать для систем (21).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, изд. III, исправленное и дополненное, Физматгиз, М., 1963.
2. A. Halanay, Solutions périodiques et presquepériodiques des systémes d'équations aux differences finies, Arch. Rat. Mech. and An., V. XII, N 2, 1962, 131—139.
3. Н. Н. Боголюбов, О некоторых статистических методах в математической физике, Изд-во АН УССР, К., 1945.

Поступила 1.II 1966 г.

Институт математики АН УССР