Применение дробных степеней операторов к исследованию квазилинейных параболических и эллиптических уравнений и систем

П. Е. Соболевский

1. В настоящей работе развитый в [1, 2] метод применяется к доказательству нелокальных теорем существования решения краевых задач вида

$$\frac{d}{dt}v + \mathfrak{A}(t, x, D_x)v = \varphi(t, x, v, D_x v, \ldots, D_x^{2m-1}v) \ (0 < t \leqslant T, x \in \Omega),$$
$$\mathfrak{A}_{m_j}(t, x, D_x)v = 0 \ (j = 1, \ldots, m, 0 < t \leqslant T, x \in S), \tag{1}$$
$$v(0, x) = v_0(x) \ (x \in \overline{\Omega} = \Omega + S).$$

Здесь v — искомая вектор-функция; $\mathfrak{A}$ — эллиптический дифференциальный оператор порядка $2m$; $\mathfrak{A}_{m_j}$ — система граничных дифференциальных операторов порядков $m_j \leqslant 2m - 1$, удовлетворяющих известному условию Я. Б. Лопатинского; Ω — открытая область n-мерного пространства с границей S.

Если данные задачи достаточно гладки, то справедлива локальная теорема существования ее решения. При этом решением краевой задачи (1) называется решение задачи Коши

$$v'(t) + A(t)\cdot v(t) = f(t, v(t)) \ (0 < t \leqslant T), \ v(0) = v_0 \tag{2}$$

в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$. Здесь $A(t)$ — эллиптический оператор, порожденный $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_{m_j}$; f — нелинейный оператор, порожденный функцией φ; $v_0 = v_0(x)$. Доказательство локальной теоремы существования решения задачи (2) проводится методом дробных степеней операторов (см. [2]). Для доказательства нелокальной теоремы достаточно установить априорную оценку

$$\| A^{\alpha}(t)v(t)\|_{L_2} \leqslant C(T) \ (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{3}$$

при определенном $\alpha > 0$. Вначале, согласно [1], исходя из односторонних ограничений на A и f, устанавливается такая же оценка

$$\| A^{\beta}(t)v(t)\|_{L_2} \leqslant C_1(T) \ (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{4}$$

но при $\beta < \alpha$. Затем, исходя из двусторонних ограничений на f, устанавливается и оценка (3). При выводе оценки (3) используется, в частности, и градиентный метод (см. [4]).

Метод дробных степеней применим также для исследования краевых задач для квазилинейных эллиптических уравнений и систем, которые могут быть сведены к операторному уравнению

$$Av = f(v) \quad (A = A(0), \ f(v) = f(0, v)) \tag{5}$$

в пространстве $L_2(\Omega)$. Существование слабых решений таких задач в последнее время было установлено в работах [5, 6], в которых рассмотрены даже квазилинейные операторы A, но нелинейности A и f могут содержать производные v лишь до порядка m.

В настоящей статье приводятся условия существования сильных решений задачи (5), причем допускается, чтобы нелинейность f содержала производные v до порядка $2m - 1$.

2. Остановимся прежде всего на ограничениях, налагаемых на оператор $A(t)$. Для простоты будем предполагать, что $A(t)$ имеет не зависящую от t область определения D. Это будет, например, тогда, когда коэффициенты граничных условий $\mathfrak{A}_{m_j}$ не зависят от t. Пусть далее $D \subset W_2^{2m}(\Omega)$ и для любого $v \in D$ справедливы неравенства

$$C_1 \| v \|^2_{W_2{}^{2m}} \leqslant \| A(t) v \|^2_{L_2} \leqslant C_2 \| v \|^2_{W_2{}^{2m}}. \tag{6}$$

Последнее неравенство очевидно. Необходимые и достаточные условия на $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_{m_j}$, при выполнении которых справедливо первое неравенство, изучены в последние годы во многих работах (см. например, [7]).

Будем предполагать, что для любого $v \in D$ справедливы неравенства

$$C_3 \| v \|^2_{W_2{}^m} \leqslant \operatorname{Re}(v, A(t) v)_{L_2} \leqslant C_4 \| v \|^2_{W_2{}^m}, \quad |\operatorname{Im}(v, A(t) v)_{L_2}| \leqslant C_5 \| v \|^2_{W_2{}^m}. \tag{7}$$

Проще всего эти неравенства устанавливаются, когда $A(t)$ — самосопряженный оператор.

Пусть для любой непрерывно дифференцируемой функции $v(t)$ такой, что функция $A(0)v(t)$ непрерывна, справедливо неравенство

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Re}(v(t), A(t) v(t))_{L_2} \leqslant 2 \operatorname{Re}\left(\frac{dv}{dt}, A(t) v(t)\right)_{L_2} + C_6 \| v(t) \|^2_{W_2{}^m}. \tag{8}$$

Это неравенство будет выполнено, если $A(t)$ — самосопряженный оператор, $A(t) A^{-1}(0)$ сильно непрерывно дифференцируем и для любого $v \in D$ справедливо неравенство

$$|(v, A'(t) v)_{L_2}| \leqslant C_7 \| v \|^2_{W_2^m}.$$

Наконец, в теореме 3 будем предполагать, что оператор-функция $A(t) A^{-1}(0)$ сильно непрерывно дифференцируема.

3. Перейдем к нелокальным теоремам. В их формулировках опущены из-за их громоздкости ограничения на гладкость. Приводятся лишь односторонние и двусторонние ограничения на рост нелинейностей.

Теорема 1. *Задача* (1) *имеет решение, определенное на всем отрезке* $[0, T]$, *если*:

1) *при некотором* $0 \leqslant \varepsilon < 1$ *справедливо одностороннее ограничение*

$$\operatorname{Re}(f, A(t) v)_{L_2} \leqslant \varepsilon \| A(t) v \|^2_{L_2} + C_8 \| v \|^2_{W_2^m} + C_9 \ (v \in D); \tag{9}$$

2) *справедливо двустороннее ограничение*

$$|f| \leqslant M(v, D_x v, \ldots, D_x^{l-1} v) + N(v, D_x v, \ldots, D_x^{l-1} v) \sum_{k=l}^{2m-1} | D_x^k v |^{p_k}, \tag{10}$$

где M, N — *произвольные непрерывные функции своих аргументов, а* p_k — *числа, удовлетворяющие неравенствам*

$$1 \leqslant p_k < \begin{cases} n + 2m/n + 2(k - m) & \text{при} \quad k > m - \dfrac{n}{2}, \\ \infty & \text{при} \quad k \leqslant m - \dfrac{n}{2}. \end{cases} \tag{11}$$

Здесь l — *целая часть числа* $m - \frac{n}{2}$, *если* $m - \frac{n}{2} \geqslant 0$ *и* $l = 0$, *если* $m - \frac{n}{2} < 0$. *В последнем случае* M *и* N — *постоянные.*

Для доказательства нужно воспользоваться неравенствами (8) и (9) и, прежде всего, получить априорную оценку

$$\| v(t) \|^2_{W_2^m} \leqslant C_2(T) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T).$$

Отсюда и из результатов [8] получается оценка вида (4). Далее нужно применить методы работы [1].

Аналогично доказывается следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Задача* (1) *имеет решение, определенное на всем отрезке* $[0, T]$, *если*:

1) *при некотором* $0 \leqslant \varepsilon < 1$ *справедливо одностороннее ограничение*

$$\int_0^t \mathrm{Re}\left(f, \frac{dv}{ds}\right)_{L_2} ds \leqslant \varepsilon \int_0^t \left|\left| \frac{dv}{ds} \right|\right|_{L_2}^2 ds + C_{10} \int_0^t ||v||_{W_2^m}^2 ds + C_{11} \qquad (12)$$

для любой непрерывно дифференцируемой функции $v(t)$ *такой, что функция* $A(0)\, v(t)$ *непрерывна и* $v(0) = v_0$;

2) *выполнено двустороннее ограничение* 2) *теоремы* 1.

Условия существования решения при наиболее слабых двусторонних ограничениях дает теорема.

Т е о р е м а 3. *Задача* (1) *имеет решение, определенное на всем отрезке* $[0, T]$, *если*:

1) *при некотором* $0 \leqslant \varepsilon < 1$ *справедливо одностороннее ограничение*

$$\int_0^t \mathrm{Re}\left(f, A(s)\frac{dv}{ds}\right)_{L_2} ds \leqslant \varepsilon \int_0^t \mathrm{Re}\left(\frac{dv}{ds}, A(s)\frac{dv}{ds}\right)_{L_2} ds + C_{12}\int_0^t ||v||_{W_2^{2m}}^2 ds + C_{13} \qquad (13)$$

для любой функции $v(t)$ *такой, что функция* $A(0)\, v(t)$ *непрерывно дифференцируема и* $v(0) = v_0$;

2) *выполнено двустороннее ограничение* (10), *где числа* p_k *удовлетворяют неравенствам*

$$1 \leqslant p_k < \begin{cases} n/n - 2(2m-k) & \text{при } k > 2m - \dfrac{n}{2}, \\ \infty & \text{при } k \leqslant 2m - \dfrac{n}{2}. \end{cases} \qquad (14)$$

Здесь l — *целая часть числа* $2m - \frac{n}{2}$, *если* $2m - \frac{n}{2} \geqslant 0$, и $l = 0$, *если*, $2m - \frac{n}{2} < 0$. *В последнем случае* M *и* N — *постоянные*.

Для д о к а з а т е л ь с т в а нужно сначала воспользоваться односторонними оценками (7) и (13) и получить первую априорную оценку

$$\| v(t) \|_{W_2^{2m}} \leqslant C_3(T) \quad (0 \leqslant t \leqslant T).$$

Этой оценки достаточно для нелокальной теоремы, так как, в силу ограничений (14),

$$\| f \|_{L_2} \leqslant \psi(\| v \|_{W_2^{2m}}),$$

где ψ — непрерывная функция.

3. Перейдем к рассмотрению эллиптических граничных задач (5).

Т е о р е м а 4. *Пусть выполнено одностороннее ограничение*

$$\mathrm{Re}\,(f, v)_{L_2} \leqslant \varepsilon\, \mathrm{Re}\,(Av, v)_{L_2} + C_{14} \quad (0 \leqslant \varepsilon < 1, v \in D).$$

Пусть выполнено двустороннее ограничение теоремы 1.

Тогда задача (5) *имеет по крайней мере одно решение.*

Для доказательства вначале с помощью (7) и (15) устанавливается первая априорная оценка

$$||v||_{W_2^m} \leqslant C$$

для решений задач $Av = \lambda f(v)$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$. Далее нужно использовать свойства дробных степеней операторов из [8] и применить теорему Лере — Шаудера.

Аналогично доказывается

Теорема 5. *Пусть выполнено одностороннее ограничение*

$$\operatorname{Re}(f, Av)_{L_2} \leqslant \varepsilon \| Av \|_{L_2}^2 + C_{15} \, (0 \leqslant \varepsilon < 1, v \in D). \tag{16}$$

Пусть выполнено двустороннее ограничение теоремы 3. Тогда задача (5) *имеет по крайней мере одно решение.*

ЛИТЕРАТУРА

1. П. О. Соболевський, Про одне доведення нелокальных теорем існування для параболічних рівнянь, ДАН УРСР, № 12, 1961, 1552—1555.
2. П. Е. Соболевский, Исследования уравнений в частных производных с помощью дробных степеней операторов, Тр. IV Всесоюзного матем. съезда, II, 1964, 519—525.
3. М. А. Красносельский, П. Е. Соболевский, Дробные степени операторов, действующих в банаховом пространстве, ДАН СССР, т. 122, № 6, 1958, 499—502.
4. Я. Д. Мамедов, О некоторых свойствах решений параболических уравнений в гильбертовом пространстве, ДАН СССР. т. 161, № 5, 1965, 1011—1014.
5. М. И. Вишик, О первой краевой задаче для квазилинейных эллиптических уравнений и систем высших порядков, Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными, Новосибирск, 1963.
6. Ф. Е. Браудер, Нелинейные эллиптические граничные задачи. Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными, Новосибирск, 1963.
7. M. Schechter, General value problem for elliptic equations, Comm. Pure and Appl. Math., v. XII, № 3, 1959, 457—486.
8. В. П. Глушко, С. Г. Крейн, Дробные степени операторов и теоремы вложения, ДАН СССР, т. 122, № 6, 1958, 963—966.

Поступила 7.IX 1965 г.

Воронежский сельскохозяйственный институт